Institut für Numerische Simulation
Rheinische Friedrich-Wilhelms-Universität Bonn

universitätbonn

Übungen zu Algorithmische Mathematik II (V1G6)

Sommersemester 2015

Prof. Dr. Martin Rumpf — Dr. Orestis Vantzos — Dipl.-Math. Behrend Heeren

Übungsblatt 6 — Abgabe: 15. Juli 2015

Aufgabe 1 (Operatornorm) — 10 Punkte

Zeigen Sie: $|||\mathbf{AB}||| \leq |||\mathbf{A}|||\,|||\mathbf{B}|||$ für $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n,n}$ und $|||.|||$ Operatornorm.

Aufgabe 2 (Diskretes Maximumprinzip) — 10 Punkte

Sei $\Omega_h \subset \mathbb{R}^2$ ein Würfelgebiet mit Gitterweite h. Sei u_h die Gitterfunktion der diskreten Lösung des Poisson-Problems, d.h. es gilt $-\Delta_h u_h = 0$ in Ω_h und $u_h = g_h$ auf $\partial\Omega_h$. Zeigen Sie: u_h nimmt sein Maximum auf dem Rand an.

Hinweis: Zeigen Sie: Nimmt u_h das Maximum im Inneren an, so ist u_h konstant.

Aufgabe 3 (Eigenwerte) — 8+2 Punkte

Betrachten Sie die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 7 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 9 \end{pmatrix}$$

(a) Geben Sie mit Hilfe des Satzes von Gerschgorin eine möglichst genaue Angabe über die Lage der Eigenwerte.

(b) Können Sie folgern, dass die Matrix invertierbar ist?

Aufgabe 4 (De-Casteljau-Algorithmus) — 7+3 Punkte

(a) Berechnen Sie für die Kontrollpunkte $P_0, \ldots, P_3$ die Auswertung des kubischen Bezierpolynoms an der Stelle $t = \frac{1}{3}$ mit Hilfe des de Casteljau-Algorithmus:

$$P_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad P_1 = \begin{pmatrix} 9 \\ 18 \end{pmatrix}, \quad P_2 = \begin{pmatrix} 18 \\ 27 \end{pmatrix}, \quad P_3 = \begin{pmatrix} 27 \\ 9 \end{pmatrix}$$

(b) Schreiben Sie den Pseudocode für ein Programm, das für vier gegebene Kontrollpunkte $P_0, \ldots, P_3$ die Auswertung des kubischen Bezierpolynoms an der Stelle t mit Hilfe des de Casteljau-Algorithmus berechnet.

Aufgabe 5 (Party) **3+3+4 Punkte**

Bei einer Party wird der Eintrittspreis gewürfelt. Der Gast zahlt die obenliegende Augenzahl in Euro als Eintrittspreis.

a) Zum Würfeln wird ein normaler Würfel verwendet. Beschreiben Sie dieses Modell durch einen geeigneten Wahrscheinlichkeitsraum.

b) Nun haben Sie die Wahl mit einem normalen Würfel zu würfeln oder 3 Euro zu bezahlen. Berechnen Sie den zu erwartenden Eintrittspreis, falls Sie würfeln. Sind 3 Euro ein fairer Eintrittspreis?

c) Nun wird ein siebenseitiger Würfel verwendet auf dem die Augenzahlen aus der 1 und den ersten sechs Primzahlen bestehen. Beschreiben Sie dieses Modell ebenfalls durch einen geeigneten Wahrscheinlichkeitsraum. Wie hoch ist, wenn Sie nun würfeln, der zu erwartende Eintrittspreis?

Aufgabe 6 (Bedingte Wahrscheinlichkeiten) **4 + 6 Punkte**

Wir betrachten einen Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, wobei Ω eine endliche Menge ist.

a) Es seien $A, B \in \mathcal{F}$ zwei Ereignisse. Definieren Sie die bedingte Wahrscheinlichkeit von A gegeben B.

b) Beweisen, Sie die folgende Aussage: Seien $B_1, \ldots, B_N \in \mathcal{F}$, paarweise disjunkte Mengen, so dass (i) $\cup_{n=1}^{N} B_n = \Omega$, (ii) $\mathbb{P}(B_n) > 0$, für alle n.

   Dann gilt für alle $A \in \mathcal{F}$, dass $\sum_{n=1}^{N} \mathbb{P}(A|B_n)\mathbb{P}(B_n) = \mathbb{P}(A)$.

Aufgabe 7 (Bedingte Wahrscheinlichkeiten) **2 + 2 + 4 Punkte**

Eine Markovkette werde durch folgende Übergangsmatrix beschrieben

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/4 & 1/2 & 1/4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

a) Geben Sie den zur Markovkette gehörigen Graphen an.

b) Zeigen Sie, dass die Markovkette mehr als eine invariante Verteilung hat und bestimmen Sie alle invarianten Verteilungen.

c) Zeigen Sie, dass $\lim_{n\uparrow\infty} P^n$ existiert und bestimmen Sie die Grenzmatrix.