Einführung in die Numerische Mathematik

Sommersemester 2015
Prof. Dr. Jochen Garcke
Patrick Diehl

universitätbonn

Übungsblatt 2.

Abgabe am **21.04.2015 vor der Vorlesung**.

Aufgabe 1. (Konvexe Funktionen)

Es sei $D \subset \mathbb{R}^d$ eine konvexe Menge und für alle $i \in \{1, 2, \dots, m\}$ sei $f_i : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$. Zeigen Sie, wenn jede Funktion f_i konvex über D ist, dann ist auch die Funktion $f : D \to \mathbb{R}, x \mapsto f(x) := \max_{i \in \{1,2,\dots,m\}} f_i(x)$ konvex über D.

(4 Punkte)

Aufgabe 2. (Stationäre Punkte)

Wir betrachten die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (x_1, x_2) \mapsto f(x_1, x_2) := 3x_1^4 - 4x_1^2 x_2 + x_2^2$.

a. Zeigen Sie, dass diese Funktion nur einen stationären Punkt hat.

b. Prüfen Sie, ob die *Hinreichende Bedingung 2. Ordnung* für die Funktion f erfüllt ist.

(4 Punkte)

Aufgabe 3. Sei $F : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ stetig differenzierbar, $x^* \in \mathbb{R}^d$ und $F'(x^*)$ ist regulär. Zeigen Sie, dass ein $\gamma > 0$ existiert, so dass $F'(x)$ für alle $x \in B_\gamma(x^*)$ regulär ist mit $||F'(x)^{-1}|| \leq c$ für eine Konstant $c > 0$.

(2 Punkte)

Aufgabe 4. (Inexaktes Newtonverfahren)

Sei $F : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ stetig differenzierbar und $x^* \in \mathbb{R}^d$ ist eine Nullstelle von F und $F'(x^*)$ ist regulär. Dann existiert ein $\gamma > 0$, so dass für jedes $x^0 \in B_\gamma(x^*)$ gilt:
Ist der Störungsfaktor η_k im k-ten Schritt des Verfahren kleiner als $\hat{\eta} \in (0,1)$, so ist das lokale inexakte Newtonverfahren wohldefiniert und die erzeugte Folge $\{x^k\}$ konvergiert gegen x^*.
Zeigen Sie die Wohldefiniertheit und die Konvergenz des inexakten Newtonverfahren.

Hinweis:

- Es existiert ein $\gamma > 0$ mit $||F(x) - F(x^*) - F'(x)(x - x^*)|| \leq \frac{1}{4c}||x - x^*||$ für alle $x \in B_\gamma(x^*)$.

(6 Punkte)

Programmieraufgabe 1. (Nullstellen mit dem Newtonverfahren)

Das Newtonverfahren kann auch als Näherungsverfahren für die Quadratwurzel $\sqrt{a}$ verwendet werden. Hierfür wird das Babylonische Wurzelziehen verwendet und die Nullstelle der Funktion $f(x) = x^2 - a$ ist eine Näherung für die Quadratwurzel aus a.
Implementieren sie in Python jeweils eine Funktion, die die Näherung der Quadratwurzel mit dem Newtonverfahren berechnet. Verwenden Sie für die Berechnung der Ableitung einmal

- das Paket *SymPy*[1] um die Ableitung symbolisch zu berechnen
- und das Paket *ad*[2] und die Ableitung mittels automatischer Differentiation zu bestimmen.

Testen Sie ihre Implementation mit verschiedenen Startwerten für $\sqrt{2}$ und geben Sie für ein Beispiel die Werte nach jeder Iteration in der Konsole aus.

(6 Punkte)

Abgabe am 27.04.2015 oder 28.04.2015 im CIP-Pool. Weitere Hinweise finden Sie auf der Webseite.

Programmieraufgabe 2. (Konvergenzgeschwindigkeit des Newtonverfahren)

Implementieren Sie das Newtonverfahren für stationäre Punkte und plotten Sie für beide Probleme in der Tabelle $||\nabla f(x,y)||$ in Abhängigkeit der Iterationen. Verwenden Sie eine logarithmische Skala auf der Y-Achse des Plots.

–	1	2
Funktion	$f(x,y) = (x-2)^4 + y^2(x-2)^2 + (y+1)^2$	$f(x,y) = (x-2)^4 + (x-2y)^2$
Startwert	$(1,1)^T$	$(0,3)^T$
Abbruchbedingung	$\|\|\nabla f(x,y)\|\| < 10^{-6}$	$\|\|\nabla f(x,y)\|\| < 10^{-6}$

Hinweis: Verwenden Sie wieder das Paket *ad* um den Gradienten und die Hessematrix zu bestimmen. Dieses Paket hat auch ein Teilpaket[3] lineare Algebra.

(6 Punkte)

Abgabe am 27.04.2015 oder 28.04.2015 im CIP-Pool. Weitere Hinweise finden Sie auf der Webseite.

[1] http://docs.sympy.org/0.7.2/tutorial.html
[2] https://pypi.python.org/pypi/ad
[3] http://pythonhosted.org//ad/linalg.html