Einführung in die Numerische Mathematik

Sommersemester 2015
Prof. Dr. Jochen Garcke
Patrick Diehl

universitätbonn

Übungsblatt 3.

Abgabe am **28.04.2015 vor der Vorlesung**.

Aufgabe 1. (Herleitung: BFGS-Formel)

Zeigen Sie durch Nachrechnen, dass folgende BFGS-Formel die Quasi-Newton-Gleichung erfüllt.

$$H_{k+1}^{\text{BFGS}} = H_k + \frac{y^k {g^k}^T}{{g^k}^T d^k} - \frac{H_k d^k (H_k d^k)^T}{{d^k}^T H_k d_k}$$

(6 Punkte)

Aufgabe 2. (Mittelwertmatrix)

a. Zeigen Sie, wenn $F \in C^2(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$ und die Folge $\{x^k\}_{k\in\mathbb{N}}$ gegen x^* konvergent, dann gilt

$$\lim_{k\to\infty} ||M(x^k, x^{k+1}) - \nabla^2 F(x^k)|| = 0,$$

b. Zeigen Sie, dass wenn die Hesse-Matrix von F in einer Umgebung U von x^* Lipschitz-stetig ist, dann gilt

$$||M(x^k, x^{k+1}) - \nabla^2 F(x^k)|| \leq \frac{L}{2}||x^{k+1} - x^k||.$$

(6 Punkte)

Aufgabe 3. (Quasi-Newton-Verfahren)

Wir betrachten $F \in C^2(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$, die Hesse-Matrix $\nabla^2 F(x) = (a_{ij}(x))_{dd}$ und die Approximation der Hesse-Matrix $B = (b_{ij})_{dd}$ durch 1. Vorwärtsdifferenzen der Gradienten von F im Punkt $x \in \mathbb{R}^d$. Für, z. B. die Abbruchbedingung, bei der Implementierung ist es wichtig, dass die Approximation B die gleichen Eigenschaften wie die Hesse-Matrix hat. Zeigen sie, dass folgendes gilt:

$$a_{i0,j0}(x) = 0 \text{ für alle } x \in \mathbb{R}^d \text{ mit } 1 \leq i0, j0 \leq d, \text{ dann ist auch } b_{i0j0} = 0 \text{ für } x \in \mathbb{R}^d.$$

Gilt das auch für die Approximation der Hesse-Matrix durch 2. Vorwärtsdifferenzen aus den Funktionswerten?

(6 Punkte)