Einführung in die Numerische Mathematik

Sommersemester 2015
Prof. Dr. Jochen Garcke
Patrick Diehl

universitätbonn

Übungsblatt 4.

Abgabe am **05.05.2015 vor der Vorlesung**.

Aufgabe 1. (Suchrichtung für Newton-artige Verfahren)

Für Newton-artige Verfahren werden die Suchrichtungen s^ℓ mit folgender Vorschrift berechnet

$$M_k s^k = -\nabla F(x^k).$$

Wobei $M_k \in \mathbb{R}^{d\times d}$ als sym. pos. def. Matrix zu wählen ist. Zeigen Sie, dass wenn $0 < \mu_1 \leq \mu_2 < \infty$ existieren, so dass $\lambda_{\min}(M_K) \geq \mu_1$, $\lambda_{\max}(M_k) \leq \mu_2$ für alle k gilt, so ist jede Suchrichtungsfolge (s^k) zulässig und die Winkelbedingung ist erfüllt.

(6 Punkte)

Aufgabe 2. Wir betrachten eine stetig differenzierbare Funktion $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ und eine Teilfolge $\{s^\ell\}$ der durch Algorithmus 5 erzeugten Folge $\{s^k\}$ von Abstiegsrichtungen . Zeigen Sie:

a. Wenn s^ℓ die Winkelbedingung erfüllt, dann erfüllt s^ℓ auch die verallgemeinerte Winkelbedingung und

b. dann gilt auch, dass aus $\left(\frac{\nabla F(x^\ell)^T s^\ell}{\|s^\ell\|}\right) \to 0 \Rightarrow \left(\nabla f(x^\ell)\right) \to 0.$

$(1+1=2$ Punkte)

Aufgabe 3. (Unzulässige Schrittweite mit der Armijo-Regel)

Die Armijo-Bedingung alleine liefert nicht immer zulässige Schrittweiten, selbst wenn die Suchrichtungen zulässig sind. Wir betrachten eine stetig differenzierbare Funktion $F : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ und die Suchrichtungen $s^k = -2^{-k}\nabla F(x^k)$. Zeigen Sie, dass

a. die (s^k) eine zulässige Suchrichtung liefern und

b. dass für $F(x) = x^2/4$ mit dem Startpunkt $x_0 > 0$ und $\gamma \leq 3/4$ immer $\sigma_k = 1$ gewählt wird. Zeigen Sie, dass diese Schrittweitenwahl unzulässig ist.

Hinweis: Sie dürfen verwenden, dass $\lim_{k\to\infty} \prod_{i=1}^{k+1}(1-\frac{1}{2^{i+1}})$ existiert und der Grenzwert $\alpha > 0$ ist.

$((3+3)=6$ Punkte)

Aufgabe 4. Wir betrachten die Funktion $f(x_1, x_2) = 3x_1^4 - 4x_1^2 x_2 + x_2^2$.

a. Zeigen Sie, dass f längs jeder parametrisierten Ursprungsgeraden in $x^* = (0,0)^T$ eine lokale Mimimalstelle besitzt und

b. dass x^* keine lokale Minimalstelle ist.

$((2+2)=4$ Punkte)

Programmieraufgabe 1. (Abstiegsverfahren mit python-ad)

Implementieren Sie ein Abstiegsverfahren und verwenden Sie für die Abstiegsrichtung s^k den steilsten Abstieg $s^k := -\nabla F(x^k)$ und für die Wahl der Schrittweite die Armijo-Schrittweite. Wenden Sie ihre Implementierung auf die streng konvexe quadratische Funktion

$$F_1(x, y) : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}, f(x, y) = \frac{1}{4}(x-5)^2 + (y-6)^2$$

mit dem Startwert $x_0 = (9, 7)^T$ an. Experimentieren Sie mit den Parametern in der Armijo-Schrittweite möglichst wenige Iterationen zu benötigen. Geben Sie für verschiedene Parameter die Anzahl der benötigten Iterationen als Matrix in der Konsole aus.
Hinweis: Die globale Minimalestelle ist $x^* = (5, 6)^T$ und das globale Minimum $f(x^*) = 0$.

(8 Punkte)

Abgabe am 11.05.2015 oder 12.05.2015 im CIP-Pool. Weitere Hinweise finden Sie auf der Webseite.