



Einführung in die Numerische Mathematik

Sommersemester 2015
Prof. Dr. Jochen Garcke
Patrick Diehl

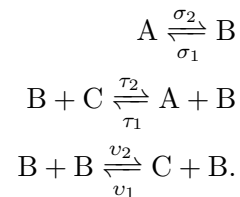


Übungsblatt 8.

Abgabe am **09.06.2015** vor der Vorlesung.

Aufgabe 1. (Chemische Reaktionsschema)

Betrachten Sie das chemische Reaktionsschema



- Stellen Sie das zugehörige System von Differentialgleichungen auf.
- Bestimmen Sie die Fixpunkte des Systems.

(6 Punkte)

Aufgabe 2. (Induktivität einer Spule)

Die Spannung U an einer Spule L für einem elektrischen Widerstand R für einer Gleichspannung U_0 wird beschrieben durch

$$U(t) = U_0 - L\dot{I}(t) \text{ mit } I(t) = \frac{U_0 - L\dot{I}(t)}{R}$$

Lösen Sie die homogene Form der Differentialgleichung mit dem Verfahren der Variation der Konstanten.

(6 Punkte)

Aufgabe 3. (Stetige Abhängigkeit vom Anfangsdatum)

Sei f stetig und erfülle die sogenannte *einseitige Lipschitz-Bedingung*

$$(f(t, y) - f(t, z))^T (y - z) \leq l \|y - z\|_2^2$$

für alle $(t, y), (t, z) \in [0, T] \times \mathbb{R}^n$ und ein $l \in \mathbb{R}$. Ferner seien $y, z: [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^n$ Lösungen der Anfangswertprobleme $y' = f(t, y)$ mit $y(0) = y_0$ bzw. $z' = f(t, z)$ mit $z(0) = z_0$ mit Vorgaben $y_0, z_0 \in \mathbb{R}^n$.

- Zeigen Sie für $x(t) := \|y(t) - z(t)\|_2^2$ und ein beliebiges Intervall $(a, b) \subseteq (0, T)$ mit $x(t) \neq 0$ für $t \in (a, b)$ die Beziehung

$$\frac{x'(t)}{x(t)} \leq 2l.$$

- Zeigen Sie, dass

$$\|y(t) - z(t)\|_2 \leq e^{lt} \|y_0 - z_0\|_2 \quad \text{für alle } t \in [0, T].$$

Damit hängt $y' = f(t, y)$ stetig von den Anfangsdaten ab.

Hinweis: Betrachten Sie $\int \frac{d}{dt} \log x(t) dt$ mit $x(t)$ aus a) über geeigneten Integrationsgrenzen.

(6 Punkte)

Die Fachschaft Mathematik feiert am 11.06 ihre Matheparty in der N8schicht. Der VVK findet am Mo. 8.06., Di. 9.06. und Mi. 10.06. vor der Mensa Poppelsdorf statt. Alle weiteren Infos auch auf fsmath.uni-bonn.de