Einführung in die Numerische Mathematik

Sommersemester 2015
Prof. Dr. Jochen Garcke
Patrick Diehl

universität bonn

Übungsblatt 10.

Abgabe am **23.06.2015 vor der Vorlesung**.

Aufgabe 1. (Butcher-Tableau)

Sei $f \in C^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ mit $n \in \mathbb{N}$. Wir betrachten folgendes AWP

$$\dot{x} = f(x, y), \qquad x(t_0) = x_0.$$

Durch das folgende Butcher-Tableau

$$\begin{array}{c|ccc} c_1 & & & \\ c_2 & a_{21} & & \\ c_3 & a_{31} & a_{32} & \\ \hline & b_1 & b_2 & 0 \end{array} \qquad \text{mit } c_1 = 0, c_2 = a_{21}, c_3 = a_{31} + a_{32}$$

wird ein explizites, zweistufiges Runge-Kutta-Verfahren

$$y^{(k+1)} = y^{(k)} + \tau_k \phi^\times(t_k, y^{(k)}, \tau_k) \tag{1}$$

definiert. Für das Verfahren berechnet sich die Stufe s wie folgt

$$g_i = f\left(x_0 + c_i h, x_0 + h \sum_{j=1}^{s-1} a_{ij} g_j\right).$$

Es gilt $x_1 = x_0 + h$.
Bestimmen Sie b_1 und b_2 in Abhängigkeit von c_2 so, dass (1) die Ordnung $p = 2$ besitzt.

(3 Punkte)

Aufgabe 2. Ein explizites Runge-Kutta-Verfahren ist genau dann invariant gegen Autonomisierung, wenn es konsistent ist und

$$c_i = \sum_{j=1}^{s} a_{ij} \quad \text{für} i = 1, \dots, s$$

erfüllt.

(6 Punkte)

Aufgabe 3. (Williamsons Runge-Kutta Verfahren)

Betrachten Sie das Runge-Kutta Verfahren zum folgenden Butcher-Tableau:

$$\begin{array}{c|ccc} c_1 & & & \\ c_2 & \frac{1}{3} & & \\ c_3 & -\frac{3}{16} & \frac{15}{16} & \\ \hline & \frac{1}{6} & \frac{3}{10} & \frac{8}{15} \end{array}$$

a. Das gegebene Verfahren ist anwendbar auf autonome Anfangswertprobleme. Erweitern Sie es nun ohne Ordnungsverlust so, dass es auch für nicht autonome Differentialgleichungen anwendbar ist, d.h. berechnen Sie die Koeffizienten c_i. Geben Sie nicht nur das Ergebnis sondern auch die bestimmenden Gleichungen an. Begründen Sie genau, warum dabei die Ordnung erhalten bleibt.

b. Zeigen Sie, dass das Verfahren mindestens Ordnung 2 besitzt.[1]

Williamson stellte das folgende Verfahren zur Lösung einer autonomen gewöhnlichen Differentialgleichung $\dot{x}(t) = f(t)$ vor

$$
\begin{aligned}
g_1 &= f(t_0) \\
g_2 &= f(t_0 + \alpha_1 g_1 h) \\
g_3 &= f(t_0 + (\alpha_1 + \beta_1\alpha_2) g_1 h + \alpha_2 g_2 h) \\
t_1 &= t_0 + (\alpha_1 + \beta_1\alpha_2 + \beta_1\beta_2\alpha_3) g_1 h + (\alpha_2 + \beta_2\alpha_3) g_2 h + \alpha_3 g_3 h.
\end{aligned}
$$

c. Geben Sie das Butcher-Tableau für den autonomen Fall des Williamsons Verfahren an.

d. Mit

$$\alpha_1 = \frac{1}{3}, \alpha_2 = \frac{15}{16}, \alpha_3 = \frac{8}{15}, \qquad \beta_1 = -\frac{5}{9}, \beta_2 = -\frac{153}{128}$$

ist das Williamsons Verfahren äquivalent zum Verfahren aus Teilaufgabe a) (nicht zu zeigen). Williamson entwickelt dieses Verfahren für hochdimensionale Probleme, d.h. für die Lösung $\mathbb{R}^n$ gilt, dass n sehr groß ist. Warum ist für hochdimensionale Probleme das WIlliamsons Verfahren, bezüglich der Implementierung vorteilhafter?

(4+2+1+2=9 Punkte)

Programmieraufgabe 1. (Runge-Kutta Verfahren)

Implementieren Sie das Runge-Kutta-Verfahren vierter Ordnung und lösen Sie folgendes AWP

$$\dot{x}(t) = t\sqrt{x(t)} \quad \text{mit } x(0) = 1.$$

Plotten Sie für den Fehler, bezogen auf die exakte Lösung $x(t) = \frac{1}{16}(t^2+4)^2$, die ersten 100 Punkte mit einer Zeitschrittweite $\delta t = 0.1$.

(12 Punkte)

Abgabe am 29.06.2015 oder 30.06.2015 im CIP-Pool. Weitere Hinweise finden Sie auf der Webseite.

[1] Tatsächlich handelt es sich um ein Verfahren dritter Ordnung. Das müssen Sie allerdings nicht zeigen.