Aufgabe 6: Gegeben sind die Punkte $x_0 = 1, x_1 = 2, x_2 = 3$. Bestimme das Interpolationspolynom zu den Werten $y_0 = 2, y_1 = 4, y_2 = 8$:

a) In der Monombasis

b) In der Lagrangebasis

Lösung: Aufstellen der Vandermonde-Matrix liefert

$$V = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \end{pmatrix}$$

Wir suchen V^{-1}:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 9 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$
$$\to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 8 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$
$$\to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -2 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & -2 & 1 \end{array}\right)$$
$$\to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 3 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{5}{2} & 4 & -\frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} \end{array}\right)$$

Also haben wir

$$V^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 1 \\ -\frac{5}{2} & 4 & -\frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} .$$

Da sich die Koeffizienten des Interpolationspolynoms in der Monom-Basis aus dem linearen Gleichungssystem $V\mathbf{a} = \mathbf{y}$ bestimmen, bekommen wir

$$\begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 1 \\ -\frac{5}{2} & 4 & -\frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Also ist das gesuchte Polynom gerade $p(x) = 2 - x + x^2$.
Die Lagrange-Basis ist gegeben durch

$$L_0(x) = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} \cdot \frac{x - x_2}{x_0 - x_2} = \frac{(x-2)(x-3)}{2} = \frac{x^2 - 5x + 6}{2}$$
$$L_1(x) = \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} \cdot \frac{x - x_2}{x_1 - x_2} = \frac{(x-1)(x-3)}{-1} = -\left(x^2 - 4x + 3\right)$$
$$L_2(x) = \frac{x - x_1}{x_2 - x_0} \cdot \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{(x-1)(x-2)}{2} = \frac{x^2 - 3x + 2}{2}$$

Das heisst, wir bekommen

$$p\,(x) = 2L_0\,(x) + 4L_1\,(x) + 8L_2\,(x) = 2 - x + x^2\ .$$

Aufgabe 7: Berechnen Sie mit Hilfe des Satzes von Taylor den Grenzwert

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2},$$

wobei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dreimal stetig differenzierbar ist.

LÖSUNG:

$$\begin{aligned}
f(x+h) &= f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{2}f''(x) + O(h^3)\\
-2f(x) &= -2f(x)\\
f(x-h) &= f(x) - hf'(x) + \frac{h^2}{2}f''(x) + O(h^3)
\end{aligned}$$

Es folgt

$$\frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2} = f''(x) + O(h)$$

Durch Grenzübergang folgt, dass der Grenzwert gleich $f''(x)$ ist.