Aufgabe 8: Berechnen Sie $\int_0^1 (x^3+3x^2-x+1)\,dx$ einmal direkt und einmal numerisch mit Hilfe der Kepler'schen Fassregel

$$K_f := \frac{b-a}{6}\left(f(a)+4f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f(b)\right),$$

wobei $a=0$, $b=1$ und $f(x)=x^3+3x^2-x+1$ ist.

Lösung:

i)

$$\begin{aligned}
\int_0^1 (x^3+3x^2-x+1)\,dx &= \frac{1}{4}x^4+x^3-\frac{1}{2}x^2+x\Big|_0^1 \\
&= \frac{1}{4}+1-\frac{1}{2}+1 \\
&= 2-\frac{1}{4}=\frac{7}{4}=1{,}75
\end{aligned}$$

ii)

$$\begin{aligned}
f(x) &= x^3+3x^2-x+1 \\
f(0) &= 1 \\
f(1) &= 1+3-1+1=4 \\
f(1/2) &= \frac{1}{8}+\frac{3}{4}-\frac{1}{2}+1=1+\frac{1}{8}+\frac{1}{4}=\frac{11}{8} \\
\Rightarrow\ K_f &= \frac{1}{6}\left(f(0)+4f(1/2)+f(1)\right) \\
&= \frac{1}{6}\left(1+4\cdot\frac{11}{8}+4\right) \\
&= \frac{1}{6}\left(1+\frac{11}{2}+4\right)=\frac{1}{6}\cdot\frac{21}{2}=\frac{3\cdot 7}{2\cdot 2\cdot 3}=\frac{7}{4}=1{,}75
\end{aligned}$$

Also gilt:

$$1{,}75 = K_f = \int_0^1 f(x)\,dx,\ \ f(x)=x^3+3x^2-x+1\,.$$

Dies ist <u>kein</u> Zufall: Es gilt allgemein:
Die Kepler'sche Fassregel integriert Polynome $p \in \mathcal{P}_3$ exakt.