

Aufgabe 9: Berechnen Sie die folgenden Ausdrücke:

a) $(4 + 3i) + 2(6 - 2i) = ?$

b) $(4 + 3i)(6 - 2i) = ?$

c) $\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right)^3 = ?$ Interpretieren Sie dies geometrisch!

LÖSUNG:

a)

$$\begin{aligned}(4 + 3i) + 2(6 - 2i) &= 4 + 3i + 12 - 4i \\ &= 16 - i\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}(4 + 3i)(6 - 2i) &= 24 + 18i - 8i + 6 \\ &= 30 + 10i\end{aligned}$$

c) Umrechnung in Polarkoordinaten.

$$r = \frac{\sqrt{3+1}}{2} = 1, \quad \sin \phi = \frac{1}{2} \Rightarrow \phi = \frac{\pi}{6}$$

Damit ergibt sich

$$\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i = \exp\left(i\frac{\pi}{6}\right), \quad \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right)^3 = \exp\left(i\frac{\pi}{2}\right) = i.$$

Wegen $r = 1$ handelt es sich bei der Multiplikation um eine reine Drehung in der komplexen Zahlenebene, und zwar um den Winkel $\phi = \frac{\pi}{6}$. Daher wird 1 drei mal um jeweils 30° , also insgesamt um 90° nach links gedreht.

Alternativ:

$$\begin{aligned}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right)^3 &= \left(\frac{3}{4} + \frac{\sqrt{3}}{2}i - \frac{1}{4}\right) \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) \\ &= \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) \\ &= \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{3}{4}i + \frac{1}{4}i - \frac{\sqrt{3}}{4} \\ &= i\end{aligned}$$