

Aufgabe 10: Zeigen Sie, dass die Drehmatrix

$$D = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$$

und die Spiegelungsmatrix

$$S = \mathbf{1} - 2nn^T \quad \text{mit} \quad n \in \mathbb{R}^3, \|n\| = 1$$

orthogonal sind.

Sind sie auch symmetrisch?

LÖSUNG:

$$\begin{aligned} D^T D &= \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha & -\cos \alpha \sin \alpha + \cos \alpha \sin \alpha \\ -\cos \alpha \sin \alpha + \cos \alpha \sin \alpha & \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$D \neq D^T$ für $\alpha \neq k\pi$

Die Drehmatrix D ist also orthogonal aber in der Regel nicht symmetrisch.

Die Spiegelungsmatrix S ist symmetrisch, denn

$$\begin{aligned} S^T &= (\mathbf{1} - 2nn^T)^T \\ &= \mathbf{1}^T - 2(nn^T)^T \\ &= \mathbf{1} - 2n^{TT}n^T \\ &= \mathbf{1} - 2nn^T \\ &= S. \end{aligned}$$

Des weiteren ist sie auch orthogonal, denn

$$\begin{aligned} S^T S = SS &= (\mathbf{1} - 2nn^T)(\mathbf{1} - 2nn^T) \\ &= \mathbf{1} - 2nn^T - 2nn^T + 4n \underbrace{n^T n}_{=n \cdot n=1} n^T \\ &= \mathbf{1} - 4nn^T + 4nn^T \\ &= \mathbf{1}. \end{aligned}$$

Aufgabe 11: Welche Aussagen sind richtig?

- a) Jede diagonalisierbare $n \times n$ Matrix hat n linear unabhängige Eigenvektoren. ja nein
- b) Jede diagonalisierbare $n \times n$ Matrix hat n verschiedene Eigenwerte. ja nein
- c) Jede symmetrische $n \times n$ Matrix hat n verschiedene Eigenwerte. ja nein
- d) Jede symmetrische Matrix ist diagonalisierbar. ja nein
- e) Jede 2×2 Spiegelungsmatrix ist diagonalisierbar. ja nein

LÖSUNG:

a) **Ja!** Siehe Skript bzw. Vorlesung.

b) **Nein!** Gegenbeispiel: $n \times n$ Einheitsmatrix

$$\mathbf{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Der Eigenwert $\lambda = 1$ ist n -facher Eigenwert:

$$\det(\mathbf{I} - \lambda \mathbf{I}) = \det((1 - \lambda)\mathbf{I}) = (1 - \lambda)^n \det \mathbf{I} = (1 - \lambda)^n .$$

c) **Nein!** Siehe b)! Die $n \times n$ Einheitsmatrix \mathbf{I} ist symmetrisch!

d) **Ja!** Siehe Skript bzw. Vorlesung.

e) **Ja!** Eine 2×2 Spiegelungsmatrix ist symmetrisch. Siehe auch Skript bzw. Vorlesung.