Aufgabe 13: Geben Sie die Lösung der Differentialgleichung $\dot{y}(t) = 5t{+}3$ mit $y(0) = 2$ an.

LÖSUNG: Die Differentialgleichung

$$\dot{y}(t) = 5y(t) + 3 \quad \text{mit} \quad y(0) = 2$$

läßt sich auch schreiben als

$$\dot{y}(t) = f(t)g(y) \qquad \text{mit } f(t) = 1,\ g(y) = 5y + 3 \quad \text{und } y(0) = 2.$$

Daraus ergibt sich mit Separation der Variablen

$$\begin{array}{rrcl} & \int_{y_0}^{y} \frac{1}{g(\tilde{y})} d\tilde{y} & = & \int_{t_0}^{t} f(\tilde{t})\, d\tilde{t} \\ \Leftrightarrow & \int_{y_0}^{y} \frac{1}{5\tilde{y}+3} d\tilde{y} & = & \int_{t_0}^{t} 1\, d\tilde{t} \\ \Leftrightarrow & \frac{1}{5}\left(\ln(5y+3) - \ln(13)\right) & = & t - t_0 \\ \Leftrightarrow & \frac{1}{5} \ln \frac{5y+3}{13} & = & t \\ \Leftrightarrow & y(t) & = & \frac{13}{5} e^{5t} - \frac{3}{5} \end{array}$$

Aufgabe 14: Geben Sie eine Lösung der Differentialgleichung an:

a) $\dot{y}(t) = t^3 + \cos(t),\ y(0) = 1,$

b) $\dot{y}(t) = \dfrac{t \cdot y(t)}{10}, \quad y(t) > 0,\ y(0) = 1.$

LÖSUNG:

a) Zur Lösung von

$$\dot{y}(t) = t^3 + \cos(t)$$

separieren wir die Variablen

$$\int_{y_0}^{y} d\tilde{y} = \int_{0}^{t} \tilde{t}^3 + \cos(\tilde{t})\, \mathrm{d}\tilde{t}$$

und erhalten so

$$y(t) = \frac{t^4}{4} + \sin(t)$$

b) Zur Lösung von

$$\dot{y}(t) = \frac{t \cdot y(t)}{10}$$

separieren wir die Variablen

$$\frac{\dot{y}}{y} = \frac{t}{10}$$

und integrieren

$$\int_{y_0}^{y} \frac{1}{\tilde{y}}\, d\tilde{y} = \int_0^t \frac{\tilde{t}}{10}\, \mathrm{d}\tilde{t}.$$

Damit erhalten wir

$$\log y - \log y_0 = \frac{t^2}{20}$$

und somit

$$y(t) = e^{\frac{t^2}{20}}.$$