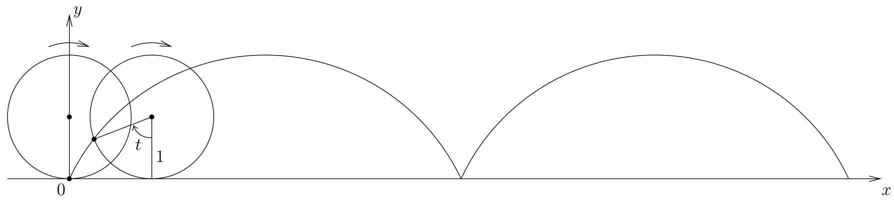
Aufgabe 1: Konstruieren Sie die Parametrisierung der abgebildeten Kurve. Diese entsteht, indem ein Kreis von Radius 1 gleichmäßig die x-Achse entlang rollt!



a) Geben Sie zunächst die Parametrisierung der Kurve an, die die Bewegung des Kreismittelpunktes beschreibt.

b) Geben Sie anschließend die Parametrisierung der Kurve an, die die Bewegung eines Punktes auf einem rotierenden Kreis mit festem Mittelpunkt beschreibt.

c) Geben Sie die Parametrisierung der oben abgebildeten und beschriebenen Kurve an, indem sie die Lösungen aus Aufgabenteil $a)$ um $(0,-1)^T$ verschieben und die Lösung aus Aufgabenteil $b)$ addieren.

d) Berechnen Sie den Betrag der Geschwindigkeit.

e) Bestimmen Sie den Wert und die Lage des Maximums und des Minimums der Geschwindigkeit.

LÖSUNG:

a) Die Kurve, die die Bewegung des Kreismittelpunktes beschreibt, wird parametrisiert durch

$$\gamma_M(t) = \begin{pmatrix} t \\ 1 \end{pmatrix}.$$

b) Die Kurve, die die Bewegung eines Punktes auf einem rotierenden Kreis mit festem Mittelpunkt beschreibt, wird parametrisiert durch

$$\gamma_P(t) = \begin{pmatrix} -\sin(t) \\ 1-\cos(t) \end{pmatrix}.$$

c) Die Parametrisierung der oben abgebildeten Kurve ist gegeben durch

$$\begin{aligned} \gamma(t) &= \gamma_M + \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \gamma_P(t) \\ &= \begin{pmatrix} t-\sin(t) \\ 1-\cos(t) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

d) Der Geschwindigkeitsvektor ist gegeben durch

$$\dot{\gamma}(t) = \begin{pmatrix} 1 - \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}$$

und somit läßt sich der Betrag der Geschwindigkeit wie folgt berechnen:

$$\begin{aligned} \|\dot{\gamma}(t)\|^2 &= (1 - \cos(t))^2 + \sin^2(t) \\ &= 1 - 2\cos(t) + 1 \\ &= 2 - 2\cos(t) \end{aligned}$$

e) Wir wissen, dass der Cosinus maximal wird für $t = 0$ und minimal für $t = \pi$ folglich nimmt der Betrag der Geschwindigkeit bei $t = 0$ sein Minimum und für $t = \pi$ sein Maximum an. Im Minimum beträgt der Betrag der Geschwindigkeit 0 und im Maximum 4.
Alternativ kann man diese Ergebnisse auch mittels erster und zweiter Ableitung nachrechnen.

Aufgabe 2: Berechnen Sie die Jacobi-Matrix und deren Determinante der Abbildung $\mathbf{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$,

$$\mathbf{F}(r, \vartheta, \varphi) := \begin{pmatrix} r \sin\vartheta \cos\varphi \\ r \sin\vartheta \sin\varphi \\ r \cos\vartheta \end{pmatrix} .$$

Lösung:

$$\mathbf{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$$

$$\mathbf{F}(r, \vartheta, \varphi) = (r \sin\vartheta \cos\varphi, r \sin\vartheta \sin\varphi, r \cos\vartheta)$$

gesucht: Jacobi-Matrix und deren Determinante

$$\begin{aligned} \mathbf{J_F}(r, \vartheta, \varphi) &= D\mathbf{F}(r, \vartheta, \varphi) \\ &= \begin{pmatrix} \sin\vartheta\cos\varphi & r\cos\vartheta\cos\varphi & -r\sin\vartheta\sin\varphi \\ \sin\vartheta\sin\varphi & r\cos\vartheta\sin\varphi & r\sin\vartheta\cos\varphi \\ \cos\vartheta & -r\sin\vartheta & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Denn: $\mathbf{J_F}(r, \vartheta, \varphi) = D\mathbf{F}(r, \vartheta, \varphi) = \begin{pmatrix} \partial_r F_1 & \partial_\vartheta F_1 & \partial_\varphi F_1 \\ \partial_r F_2 & \partial_\vartheta F_2 & \partial_\varphi F_2 \\ \partial_r F_3 & \partial_\vartheta F_3 & \partial_\varphi F_3 \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned} F_1(r, \vartheta, \varphi) &= r\sin\vartheta\cos\varphi & \qquad F_2(r, \vartheta, \varphi) &= r\sin\vartheta\sin\varphi \\ \partial_r F_1 &= \sin\vartheta\cos\varphi & \partial_r F_2 &= \sin\vartheta\sin\varphi \\ \partial_\vartheta F_1 &= r\cos\vartheta\cos\varphi & \partial_\vartheta F_2 &= r\cos\vartheta\sin\varphi \\ \partial_\varphi F_1 &= -r\sin\vartheta\sin\varphi & \partial_\varphi F_2 &= r\sin\vartheta\cos\varphi \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F_3(r, \vartheta, \varphi) &= r\cos\vartheta \\ \partial_r F_3 &= \cos\vartheta \\ \partial_\vartheta F_3 &= -r\sin\vartheta \\ \partial_\varphi F_3 &= 0 \end{aligned}$$

Berechnung der Determinante:
Regel von Sarrus

$$
\begin{aligned}
\det \mathbf{J_F}(r,\vartheta,\varphi) &= \det D\mathbf{F}(r,\vartheta,\varphi) \\
&= \det \begin{pmatrix} \sin\vartheta\cos\varphi & r\cos\vartheta\cos\varphi & -r\sin\vartheta\sin\varphi \\ \sin\vartheta\sin\varphi & r\cos\vartheta\sin\varphi & r\sin\vartheta\cos\varphi \\ \cos\vartheta & -r\sin\vartheta & 0 \end{pmatrix} \\
&= 0 + r^2\cos^2\vartheta\cos^2\varphi\sin\vartheta + r^2\sin^3\vartheta\sin^2\varphi \\
&\quad + r^2\cos^2\vartheta\sin^2\varphi\sin\vartheta + r^2\sin^3\vartheta\cos^2\varphi + 0 \\
&= r^2\sin\vartheta\big(\cos^2\vartheta\cos^2\varphi + \sin^2\vartheta\sin^2\varphi \\
&\quad + \cos^2\vartheta\sin^2\varphi + \sin^2\vartheta\cos^2\varphi\big) \\
&= r^2\sin\vartheta\Big((\cos^2\vartheta+\sin^2\vartheta)\cos^2\varphi + (\sin^2\vartheta+\cos^2\vartheta)\sin^2\varphi\Big) \\
&= r^2\sin\vartheta\cdot 1 \\
&= r^2\sin\vartheta
\end{aligned}
$$

Entwicklung nach der 3ten Spalte

$$
\begin{aligned}
\det \mathbf{J_F}(r,\vartheta,\varphi) &= \det D\mathbf{F}(r,\vartheta,\varphi) \\
&= \det \begin{pmatrix} \sin\vartheta\cos\varphi & r\cos\vartheta\cos\varphi & -r\sin\vartheta\sin\varphi \\ \sin\vartheta\sin\varphi & r\cos\vartheta\sin\varphi & r\sin\vartheta\cos\varphi \\ \cos\vartheta & -r\sin\vartheta & 0 \end{pmatrix} \\
&= (-1)^{1+3}(-r\sin\vartheta\sin\varphi)\cdot \begin{pmatrix} \sin\vartheta\sin\varphi & r\cos\vartheta\sin\varphi \\ \cos\vartheta & -r\sin\vartheta \end{pmatrix} \\
&\quad +(-1)^{2+3}(r\sin\vartheta\cos\varphi)\cdot \begin{pmatrix} \sin\vartheta\cos\varphi & r\cos\vartheta\cos\varphi \\ \cos\vartheta & -r\sin\vartheta \end{pmatrix} \\
&= (r\sin\vartheta)\Big((-\sin\varphi)\cdot\big(-r\sin^2\vartheta\sin\varphi - r\cos^2\vartheta\sin\varphi\big) \\
&\quad +(-\cos\varphi)\big(-r\sin^2\vartheta\cos\varphi - r\cos^2\vartheta\cos\varphi\big)\Big) \\
&= (r\sin\vartheta)\big(r\sin^2\varphi + r\cos^2\varphi\big) \\
&= (r^2\sin\vartheta)\cdot 1 \\
&= (r^2\sin\vartheta) \quad \checkmark
\end{aligned}
$$

Aufgabe 3: Gegeben seien die Funktionen

$$
\begin{aligned}
f:\mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^2 \qquad & \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto f(x,y) = \begin{pmatrix} x^2y+2x \\ x^3-2y^2x \end{pmatrix}, \\
g:\mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^2 \qquad & \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto g(x,y,z) = \begin{pmatrix} x\ln(1+y^2)+z \\ \cos(zx)+y \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

Berechnen Sie, falls existent die Jacobimatrix $D(f\circ g)(2,0,0)$.

LÖSUNG: Zunächst ist $g(2,0,0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Weiterhin sind alle Funktionen stetig differenzierbar. Damit existiert die Ableitung und mit der Kettenregel erhalten wir

$$Df = \begin{pmatrix} 2xy+2 & x^2 \\ 3x^2-2y^2 & 4xy \end{pmatrix}, \quad Dg = \begin{pmatrix} \ln(1+y^2) & \frac{2xy}{1+y^2} & 1 \\ -z\sin(xz) & 1 & -x\sin(xz) \end{pmatrix}$$

Durch Einsetzen der Werte und die Matrixmultiplikation erhalten wir

$$D(f\circ g)(2,0,0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 4: Betrachten Sie die Funktion

$$f(x,y) = \sqrt{1-x^2-y^2}, \qquad \text{mit} \qquad x^2+y^2 < 1.$$

a) Worum handelt es sich bei dem Graphen dieser Funktion?

b) Berechnen Sie $\nabla f(x,y)$.

c) Bestimmen Sie den Tangentialraum $T_{(x,y,f(x,y))}G_f$ an den Graphen von f in einem beliebigen Punkt $(x,y,f(x,y))$.

d) Bestimmen Sie die Normale $N(x,y)$ an den Graphen von f in einem beliebigen Punkt (x,y).

e) Geben Sie $T_{(x,y,f(x,y))}G_f$ und $N(x,y)$ für $(x,y)=(0,0)$ und $(x,y)=(\frac{1}{2},0)$ an.

LÖSUNG:

a) Bei dem Graphen der Funktion f handelt es sich um die obere Hälfte der Einheitskugel (Kugel mit Radius 1) mit Mittelpunkt im Ursprung.

b)
$$\nabla f(x,y) = -\left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2-y^2}}, \frac{y}{\sqrt{1-x^2-y^2}}\right)$$

c)
$$\begin{aligned}
T_{(x,y,f(x,y))}G_f &= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ f(x,y) \end{pmatrix} + v \,\middle|\, v \in \operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \partial_x f \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \partial_y f \end{pmatrix} \right\} \right\} \\
&= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ \sqrt{1-x^2-y^2} \end{pmatrix} + v \,\middle|\, v \in \operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -\frac{x}{\sqrt{1-x^2-y^2}} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -\frac{y}{\sqrt{1-x^2-y^2}} \end{pmatrix} \right\} \right\}
\end{aligned}$$

d)

$$
\begin{aligned}
N(x,y) &= \frac{1}{\sqrt{1+\|\nabla f\|^2}} \begin{pmatrix} -\nabla f \\ 1 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{\sqrt{1+\frac{x^2+y^2}{1-x^2-y^2}}} \begin{pmatrix} \frac{x}{\sqrt{1-x^2-y^2}} \\ \frac{y}{\sqrt{1-x^2-y^2}} \\ 1 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{1-x^2-y^2}}} \begin{pmatrix} \frac{x}{\sqrt{1-x^2-y^2}} \\ \frac{y}{\sqrt{1-x^2-y^2}} \\ 1 \end{pmatrix} \\
&= \sqrt{1-x^2-y^2} \begin{pmatrix} \frac{x}{\sqrt{1-x^2-y^2}} \\ \frac{y}{\sqrt{1-x^2-y^2}} \\ 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} x \\ y \\ \sqrt{1-x^2-y^2} \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

e)

$$
\begin{aligned}
T_{(0,0,1)}G_f &= \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + v \,\middle|\, v \in \operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \right\} \\
T_{(\frac{1}{2},0,\frac{\sqrt{3}}{2})}G_f &= \left\{ \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} + v \,\middle|\, v \in \operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \right\}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
N(0,0) &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\
N\left(\frac{1}{2},0\right) &= \frac{\sqrt{3}}{2} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$