Aufgabe 9: Geben Sie die Formel für die Taylorentwicklung dritter Ordnung einer Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ im Punkt $x = 1$ an. Wenden Sie diese Formel auf $f(x) = \sin(\pi x)$.

Aufgabe 10: Berechnen Sie die Taylorentwicklung der Funktion $f : \mathbb{R} \setminus \{1\} \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \frac{1}{1-x}$$

um den Punkt $x = 0$ bis zu einem Fehlerterm der Ordnung $O(|y|^6)$.

Aufgabe 11:

- Berechnen Sie die Taylorentwicklung der Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad f(x) = \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)$$

  um die Stelle 0 bis zur Ordnung 4, das heißt mit Restglied fünfter Ordnung.

- Welche Regelmäßigkeit lässt sich erkennen? Stellen Sie eine Vermutung für die weiteren Terme der Entwicklung auf.

- Stellen Sie die zu approximierende Funktion f sowie alle errechneten (und vermuteten) Taylor-Polynome aufsteigender Ordnung graphisch mit Hilfe eines geeigneten Programms dar.

Aufgabe 12: Zwischen geographischer Breite B und reduzierter Breite β besteht der Zusammenhang

$$\beta = \arctan(\sqrt{1-\varepsilon^2}\,\tan B),$$

wobei $\varepsilon = \sqrt{1 - \left(\frac{b}{a}\right)^2}$ die numerische Exzentrizität des Erdellipsoids mit Halbachsen a und b ist.
Entwickeln Sie die Differenz $\beta - B$ nach ε mit einem Fehlerterm $O(\epsilon^4)$.
Anleitung: Betrachten Sie den Zusammenhang als Verkettung zweier Funktionen

$$\begin{aligned} \beta(w) &= \arctan(w), \\ w(\epsilon) &= \sqrt{1-\varepsilon^2}\, w_0, \\ w_0 &= \tan B = w(0). \end{aligned}$$

- Entwickeln Sie $\beta(w)$ um w_0 bis zum Fehlerterm $O(|w - w_0|^2)$.

- Entwickeln Sie $w(\epsilon)$ um den Punkt 0 bis $O(\epsilon^4)$.

- Setzen die beiden Entwicklungen zusammen, um eine Darstellung von $\beta - B = \beta(w(\epsilon)) - \beta(w_0)$ zu erhalten.

Aufgabe 13: Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte mit Hilfe geeigneter Potenzreihenentwicklungen:

a) $\lim_{x \to 0} \dfrac{x - \sin x}{\sin^3 x}$, b) $\lim_{x \to 0} \dfrac{x \log(1 + x^2) - x^3}{x^5}$,

c) $\lim_{x \to 0} \dfrac{\tan x - \sin x}{x^3}$, d) $\lim_{x \to 0} \dfrac{x - \tan x}{x - \sin x}$.

Tipp: Schreiben Sie die Restglieder jeweils mit Hilfe des universellen Symbols $O(\ldots)$.