Aufgabe 9: Geben Sie die Formel für die Taylorentwicklung dritter Ordnung einer Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ im Punkt $x = 1$ an. Wenden Sie diese Formel auf $f(x) = \sin(\pi x)$.

LÖSUNG:

$$f(y) = f(1) + f'(1)(y-1) + \frac{1}{2}f''(1)(y-1)^2 + \frac{1}{6}f'''(1)(y-1)^3 + O((y-1)^4)$$

Mit $f(x) = \sin(\pi x)$ ergibt sich

$$f(y) = -\pi(y-1) + \frac{\pi^3}{6}(y-1)^3 + O((y-1)^4)$$

Aufgabe 10: Berechnen Sie die Taylorentwicklung der Funktion $f : \mathbb{R} \setminus \{1\} \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \frac{1}{1-x}$$

um den Punkt $x = 0$ bis zu einem Fehlerterm der Ordnung $O(|y|^6)$.

LÖSUNG: Ableitungen der Funktion $f(x)$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{(1-x)^2} \\ f''(x) &= \frac{2}{(1-x)^3} \\ f^{(3)}(x) &= \frac{6}{(1-x)^4} \\ f^{(4)}(x) &= \frac{24}{(1-x)^5} \\ f^{(5)}(x) &= \frac{120}{(1-x)^6} \end{aligned}$$

Taylorentwicklung von $f(y)$ um den Punkt $x = 0$:

$$\begin{aligned} f(y) &= f(0) + f'(0)y + \frac{1}{2}f''(0)y^2 + \frac{1}{6}f^{(3)}(0)y^3 + \frac{1}{24}f^{(4)}(0)y^4 + \frac{1}{120}f^{(5)}(0)y^5 + O(|y|^6) \\ &= 1 + y + y^2 + y^3 + y^4 + y^5 + O(|y|^6) \end{aligned}$$

Aufgabe 11:

- Berechnen Sie die Taylorentwicklung der Funktion
$$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\qquad f(x)=\exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)$$
um die Stelle 0 bis zur Ordnung 4, das heißt mit Restglied fünfter Ordnung.
- Welche Regelmäßigkeit lässt sich erkennen? Stellen Sie eine Vermutung für die weiteren Terme der Entwicklung auf.
- Stellen Sie die zu approximierende Funktion f sowie alle errechneten (und vermuteten) Taylor-Polynome aufsteigender Ordnung graphisch mit Hilfe eines geeigneten Programms dar.

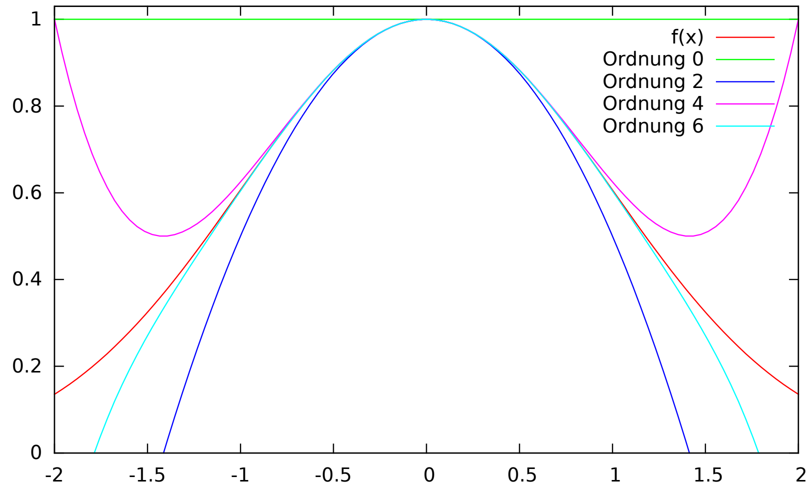
LÖSUNG:

- $$\begin{aligned}
f'(x) &= -\,x\exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)\\
f''(x) &= -\exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)+x^2\exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)\\
f^{(3)}(x) &= x\exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)+2x\exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)-x^3\exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)\\
f^{(4)}(x) &= \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)-x^2\exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)+2\exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)\\
&\quad -2x^2\exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)-3x^2\exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)+x^4\exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow f(x) &= 1+0x+\frac{1}{2}\left(-1+0\right)x^2+\frac{1}{6}\left(0+0-0\right)x^3+\frac{1}{24}\left(1-0+2-0-0+0\right)x^4+O(x^5)\\
&= 1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{8}+O(x^5)
\end{aligned}$$

- Es handelt sich um die Exponentialreihe mit Argument $-\frac{x^2}{2}$, d.h.
$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(-\frac{x^2}{2}\right)^n=1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{8}-\frac{x^6}{48}+\dots$$

•



Aufgabe 12: Zwischen geographischer Breite B und reduzierter Breite β besteht der Zusammenhang

$$\beta = \arctan(\sqrt{1-\varepsilon^2}\,\tan B),$$

wobei $\varepsilon = \sqrt{1 - \left(\frac{b}{a}\right)^2}$ die numerische Exzentrizität des Erdellipsoids mit Halbachsen a und b ist.
Entwickeln Sie die Differenz $\beta - B$ nach ε mit einem Fehlerterm $O(\epsilon^4)$.
Anleitung: Betrachten Sie den Zusammenhang als Verkettung zweier Funktionen

$$\begin{aligned} \beta(w) &= \arctan(w), \\ w(\epsilon) &= \sqrt{1-\varepsilon^2}\, w_0, \\ w_0 &= \tan B = w(0). \end{aligned}$$

- Entwickeln Sie $\beta(w)$ um w_0 bis zum Fehlerterm $O(|w-w_0|^2)$.
- Entwickeln Sie $w(\epsilon)$ um den Punkt 0 bis $O(\epsilon^4)$.
- Setzen die beiden Entwicklungen zusammen, um eine Darstellung von $\beta - B = \beta(w(\epsilon)) - \beta(w_0)$ zu erhalten.

Lösung:

$$\frac{d}{dx}\arctan x = \frac{1}{1+x^2}$$

Entwickeln wir die Funktion $\beta(w)$ um w_0 so erhalten wir also

$$\beta(w) = \arctan w = \arctan w_0 + \frac{1}{1+w_0^2}(w-w_0) + O\left(|w-w_0|^2\right)$$

Nun betrachten wir $w(\epsilon) = \sqrt{1-\epsilon^2}w_0$.

$$\begin{aligned} w'(\epsilon) &= -\frac{\epsilon}{\sqrt{1-\epsilon^2}}w_0 \\ w''(\epsilon) &= -\frac{1}{(1-\epsilon^2)^{\frac{3}{2}}}w_0 \\ w'''(\epsilon) &= -\frac{3\epsilon}{(1-\epsilon^2)^{\frac{5}{2}}}w_0 \end{aligned}$$

$$w(\epsilon) = w_0 - \frac{\epsilon^2}{2}w_0 + O(\epsilon^4)$$

Nun ist

$$\begin{aligned} \beta - B = \beta(w(\epsilon)) - \beta(w_0) &= \arctan w(\epsilon) - \arctan w_0 \\ &= \frac{w(\epsilon) - w_0}{1 + w_0^2} + O(|w(\epsilon) - w_0|^2), \\ w(\epsilon) - w_0 &= -\frac{\epsilon^2}{2}w_0 + O(\epsilon^4) \\ &= -\frac{\epsilon^2}{2}\tan B + O(\epsilon^4) \end{aligned}$$

Insbesondere ist $w(\epsilon) - w_0 = O(\epsilon^2)$.

Die Entwicklung der Differenz $\beta - B$ nach Potenzen von ε mit einem Fehlerterm $O(\epsilon^4)$ sieht also wie folgt aus

$$\begin{aligned} \beta - B &= \frac{-\frac{\epsilon^2}{2}\tan B + O(\epsilon^4)}{1 + \tan^2 B} + \underbrace{O\left(|w(\epsilon) - w_0|^2\right)}_{=O((\epsilon^2)^2)} \\ &= \left(-\frac{\epsilon^2}{2}\right)\frac{\tan B}{1 + \tan^2 B} + O(\epsilon^4). \end{aligned}$$

Aufgabe 13: Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte mit Hilfe geeigneter Potenzreihenentwicklungen:

a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x - \sin x}{\sin^3 x}$, b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x\log(1+x^2) - x^3}{x^5}$,

c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\tan x - \sin x}{x^3}$, d) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x - \tan x}{x - \sin x}$.

Tipp: Schreiben Sie die Restglieder jeweils mit Hilfe des universellen Symbols $O(\ldots)$.

LÖSUNG: a) $\lim_{x\to 0} \frac{x-\sin x}{\sin^3 x} = \frac{1}{6}$. Denn:

$$\begin{aligned}
\frac{x-\sin x}{\sin^3 x} &= \frac{x-(x-\frac{1}{6}x^3+O(x^5))}{(x-\frac{1}{6}x^3+O(x^5))^3} \\
&= \frac{x^3\left(\frac{1}{6}+O(x^2)\right)}{x^3\left(1-\frac{1}{6}x^2+O(x^4)\right)^3} \\
&= \frac{\left(\frac{1}{6}+O(x^2)\right)}{\left(1-\frac{1}{6}x^2+O(x^4)\right)^3} \to \frac{1}{6} \qquad \text{für } x\to 0\,!
\end{aligned}$$

b) $\lim_{x\to 0} \frac{x\log(1+x^2)-x^3}{x^5} = -\frac{1}{2}$. Denn:

$$\begin{aligned}
\frac{x\log(1+x^2)-x^3}{x^5} &= \frac{x(x^2-\frac{x^4}{2}+O(x^6))-x^3}{x^5} \\
&= \frac{\left(-\frac{1}{2}+O(x^2)\right)x^5}{x^5} \\
&= -\frac{1}{2}+O(x^2) \to -\frac{1}{2} \qquad \text{für } x\to 0\,!
\end{aligned}$$

c) $\lim_{x\to 0} \frac{\tan x-\sin x}{x^3} = \frac{1}{2}$. Denn:

$$\begin{aligned}
\frac{\tan x-\sin x}{x^3} &= \frac{(x+\frac{1}{3}x^3+O(x^5))-(x-\frac{1}{6}x^3+O(x^5))}{x^3} \\
&= \left(\frac{1}{3}+\frac{1}{6}\right)+O(x^2) \\
&= \frac{3}{6}+O(x^2) = \frac{1}{2}+O(x^2) \to \frac{1}{2} \qquad \text{für } x\to 0\,!
\end{aligned}$$

d) $\lim_{x\to 0} \frac{x-\tan x}{x-\sin x} = -2$. Denn:

$$\begin{aligned}
\frac{x-\tan x}{x-\sin x} &= \frac{x-(x+\frac{1}{3}x^3+O(x^5))}{x-(x-\frac{1}{6}x^3+O(x^5))} \\
&= \frac{x^3(-\frac{1}{3}+O(x^2))}{x^3(\frac{1}{6}+O(x^2))} \\
&= \frac{-2+O(x^2)}{1+O(x^2)} \to -2 \qquad \text{für } x\to 0\,!
\end{aligned}$$