Aufgabe 14: Differenzieren Sie die Funktion $f(x) = x^x = \exp(x \ln x)$ numerisch an der Stelle $x_0 = 3$ mit dem zentralen Differenzenquotienten und dem Vorwärtsdifferenzenquotienten für $h = 10^{-1}$, $h = 10^{-2}$, $h = 10^{-3}$. Vergleichen Sie Ihre numerischen Ergebnisse mit dem exakten Wert $f'(3) = 3^3(\ln 3 + 1)$. Tragen Sie die Fehler für die verschiedenen Werte von h in eine Tabelle ein.

Aufgabe 15: Bestimmen Sie das Polynom $p(x)$ dritten Grades, das die folgenden Werte annimmt:

x_i	0	1	3	4
y_i	2	4	5	10

a) Bestimmen Sie das gesuchte Polynom $p(x)$ über ein lineares Gleichungssystem.

b) Bestimmen Sie das gesuchte Polynom $p(x)$ unter Benutzung von Lagrange-Polynomen.

c) Wie ändert sich $p(5)$, wenn $y_2 = 5{,}02$ statt $y_2 = 5$ gesetzt wird?

Aufgabe 16: Bestimmen Sie ein quadratisches Polynom $p(x)$, das in 0, $\frac{\pi}{2}$ und π mit $f(x) = \sin x$ übereinstimmt.
Rechnen Sie den Fehler $|f(x) - p(x)|$ in $x = \frac{\pi}{4}$ explizit aus.

Aufgabe 17: Betrachten Sie die Kurve

$$\gamma : [0,4] \to \mathbb{R}^2, \quad \gamma(t) = \begin{pmatrix} \gamma_1(t) \\ \gamma_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\frac{\pi}{2}t) \\ \sin(\frac{\pi}{2}t) \end{pmatrix}.$$

Interpolieren Sie die beiden Funktionen $\gamma_1(t)$ und $\gamma_2(t)$ durch Polynome p_1 und p_2 mit den Stützstellen 0, 1, 2, 3 und 4.
Nun definieren wir die Kurve

$$p : [0,4] \to \mathbb{R}^2, \quad p(t) = \begin{pmatrix} p_1(t) \\ p_2(t) \end{pmatrix}.$$

In welchen Punkten schneiden sich die beiden Kurven γ und p?
Ist p eine geschlossene Kurve?

Aufgabe 18: Zeichnen Sie die beiden Kurven

$$\gamma : [0,4] \to \mathbb{R}^2, \quad \gamma(t) = \begin{pmatrix} \gamma_1(t) \\ \gamma_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\frac{\pi}{2}t) \\ \sin(\frac{\pi}{2}t) \end{pmatrix}$$

und

$$p : [0,4] \to \mathbb{R}^2, \quad p(t) = \begin{pmatrix} p_1(t) \\ p_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{6}t^4 + \frac{4}{3}t^3 - \frac{17}{6}t^2 + \frac{2}{3}t + 1 \\ \frac{1}{3}(t^3 - 6t^2 + 8t) \end{pmatrix}$$

mit MATLAB.