**Aufgabe 14:** Differenzieren Sie die Funktion $f(x) = x^x = \exp(x \ln x)$ numerisch an der Stelle $x_0 = 3$ mit dem zentralen Differenzenquotienten und dem Vorwärtsdifferenzenquotienten für $h = 10^{-1}$, $h = 10^{-2}$, $h = 10^{-3}$. Vergleichen Sie Ihre numerischen Ergebnisse mit dem exakten Wert $f'(3) = 3^3(\ln 3 + 1)$. Tragen Sie die Fehler für die verschiedenen Werte von $h$ in eine Tabelle ein.

LÖSUNG:

$$\begin{aligned}
f(x) &= x^x = e^{x \ln x} \\
x_0 &= 3 \\
\\
f(3) &= 3^3 = 3 \cdot 3 \cdot 3 = 27 \\
f'(x) &= \left(e^{x \ln x}\right)' \\
&= e^{x \ln x} \cdot \left\{ 1 \cdot \ln x + x \cdot \frac{1}{x} \right\} \\
&= x^x \cdot (\ln x + 1) \\
f'(3) &= 3^3 \cdot (\ln 3 + 1) \\
&= 27 \cdot (1 + \ln 3) \\
&= 27 + 27 \cdot \ln 3 \\
&\approx 27(1 + 1{,}098612289) \\
&\approx 56{,}66253179 \quad \text{(Taschenrechner)}
\end{aligned}$$

Zentraler Differenzenquotient:

$$ZD_f(x_0, h) = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0 - h)}{2h}$$

$$h = 10^{-1} = \frac{1}{10},\ h = 10^{-2} = \frac{1}{10^2} = \frac{1}{100},\ h = 10^{-3} = \frac{1}{10^3} = \frac{1}{1000}$$

$$\begin{aligned}
h = \frac{1}{10}:\ ZD_f(3, \frac{1}{10}) &= \frac{f(3{,}1) - f(2{,}9)}{1/5} \\
&= 5 \cdot \left((3{,}1)^{3{,}1} - (2{,}9)^{2{,}9}\right) \\
&\approx 5 \cdot (33{,}35963198 - 21{,}92573667) \\
&\approx 5 \cdot 11{,}43389531 \\
&\approx 57{,}16947654 \\
|\mathit{Fehler}| &\approx 57{,}16947654 - 56{,}66253179 \approx 0{,}50694475
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
h = \frac{1}{100}: \; ZD_f(3, \frac{1}{100}) &= 50 \cdot \left((3{,}01)^{3{,}01} - (2{,}99)^{2{,}99}\right) \\
&\approx 50 \cdot (27{,}5730718 - 26{,}43972009) \\
&\approx 50 \cdot 1{,}13335171 \\
&\approx 56{,}66758548 \\
|Fehler| &\approx 56{,}66758548 - 56{,}66253179 \approx 0{,}005053685
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
h = \frac{1}{1000}: \; ZD_f(3, \frac{1}{1000}) &= 500 \cdot \left((3{,}001)^{3{,}001} - (2{,}999)^{2{,}999}\right) \\
&\approx 500 \cdot (27{,}05672654 - 26{,}94340137) \\
&\approx 500 \cdot 0{,}113325166 \\
&\approx 56{,}66258295 \\
|Fehler| &\approx 56{,}66258295 - 56{,}66253179 \approx 0{,}00005116
\end{aligned}$$

Vorwärtsdifferenzenquotient:

$$VD_f(x_0, h) = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

$$\begin{aligned}
h = \frac{1}{10}: \; VD_f(3, \frac{1}{10}) &\approx 63{,}59631979 \\
|Fehler| &\approx 6{,}933787997
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
h = \frac{1}{100}: \; VD_f(3, \frac{1}{100}) &\approx 57{,}30718008 \\
|Fehler| &\approx 0{,}64464829
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
h = \frac{1}{1000}: \; VD_f(3, \frac{1}{1000}) &\approx 56{,}7265386 \\
|Fehler| &\approx 0{,}06400681
\end{aligned}$$

| $h$ | $\frac{1}{10}$ | $\frac{1}{100}$ | $\frac{1}{1000}$ |
|---|---|---|---|
| $ZD_f(3,h)$ | 0,507 | 0,00505 | 0,0000512 |
| $VD_f(3,h)$ | 6,93 | 0,645 | 0,0640 |

Man sieht gut die unterschiedliche Approximationsordnung: Beim Vorwärts-Differenzenquotienten wird der Fehler um den Faktor 10 kleiner, wenn man $h$ durch 10 teilt (Ordnung $O(h)$). Beim zentralen Differenzenquotienten wird der Fehler bei der Zehntelung von $h$ um den Faktor 100 kleiner (Ordnung $O(h^2)$).

**Aufgabe 15:** Bestimmen Sie das Polynom $p(x)$ dritten Grades, das die folgenden Werte annimmt:

| $x_i$ | 0 | 1 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| $y_i$ | 2 | 4 | 5 | 10 |

a) Bestimmen Sie das gesuchte Polynom $p(x)$ über ein lineares Gleichungssystem.

b) Bestimmen Sie das gesuchte Polynom $p(x)$ unter Benutzung von Lagrange-Polynomen.

c) Wie ändert sich $p(5)$, wenn $y_2 = 5{,}02$ statt $y_2 = 5$ gesetzt wird?

LÖSUNG:

| $x_i$ | 0 | 1 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| $y_i$ | 2 | 4 | 5 | 10 |

a) <u>Ansatz:</u> $p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3$

$$\begin{aligned}
p(0) = 2 \quad &\Rightarrow \quad a_0 = 2 \\
p(1) = 4 \quad &\Rightarrow \quad 2 + a_1 + a_2 + a_3 = 4 \\
&\Leftrightarrow \quad a_1 + a_2 + a_3 = 2 \quad \mathrm{I} \\
p(3) = 5 \quad &\Rightarrow \quad 2 + 3a_1 + 9a_2 + 27a_3 = 5 \\
&\Leftrightarrow \quad a_1 + 3a_2 + 9a_3 = 1 \quad \mathrm{II} \\
p(4) = 10 \quad &\Rightarrow \quad 2 + 4a_1 + 16a_2 + 64a_3 = 10 \\
&\Leftrightarrow \quad a_1 + 4a_2 + 16a_3 = 2 \quad \mathrm{III}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{II} - \mathrm{I}: \quad & 2a_2 + 8a_3 = -1 \\
\mathrm{III} - \mathrm{I}: \quad & 3a_2 + 15a_3 = 0 \;\Leftrightarrow\; a_2 = -5a_3 \\
& \Rightarrow\; -10a_3 + 8a_3 = -1 \\
& \Leftrightarrow\; 2a_3 = 1 \;\Leftrightarrow\; a_3 = \frac{1}{2} \\
& \Rightarrow\; a_2 = -\frac{5}{2} \\
\Rightarrow \quad & a_1 = 2 - a_2 - a_3 = 2 + \frac{5}{2} - \frac{1}{2} = 4 \\
\Rightarrow \quad & p(x) = 2 + 4x - \frac{5}{2}x^2 + \frac{1}{2}x^3
\end{aligned}$$

<u>Probe:</u>

$$\begin{aligned}
p(0) &= 2 \quad \checkmark \\
p(1) &= 2 + 4 - \frac{5}{2} + \frac{1}{2} = 4 \quad \checkmark \\
p(3) &= 2 + 12 - \frac{45}{2} + \frac{27}{2} = 14 - \frac{18}{2} = 14 - 9 = 5 \quad \checkmark \\
p(4) &= 2 + 16 - 40 + 32 = 50 - 40 = 10 \quad \checkmark
\end{aligned}$$

b) Lagrangeformel: $p(x) = 2p_0(x) + 4p_1(x) + 5p_2(x) + 10p_3(x)$
mit:

$$\begin{aligned}
p_0(x) &= \frac{(x-1)(x-3)(x-4)}{(0-1)(0-3)(0-4)} \\
&= \left(-\frac{1}{12}\right)(x-1)(x^2-7x+12) \\
&= \left(-\frac{1}{12}\right)(x^3-8x^2+19x-12) \\
&= -\frac{1}{12}x^3 + \frac{2}{3}x^2 - \frac{19}{12}x + 1 \\
p_1(x) &= \frac{x(x-3)(x-4)}{1(1-3)(1-4)} \\
&= \frac{1}{6}(x^3-7x^2+12x) \\
&= \frac{1}{6}x^3 - \frac{7}{6}x^2 + 2x \\
p_2(x) &= \frac{x(x-1)(x-4)}{3(3-1)(3-4)} \\
&= \left(-\frac{1}{6}\right)(x^3-5x^2+4x) \\
&= -\frac{1}{6}x^3 + \frac{5}{6}x^2 - \frac{2}{3}x \\
p_3(x) &= \frac{x(x-1)(x-3)}{4(4-1)(4-3)} \\
&= \frac{1}{12}(x^3-4x^2+3x) \\
&= \frac{1}{12}x^3 - \frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{4}x
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
p(x) &= \left(-\frac{2}{12} + \frac{4}{6} - \frac{5}{6} + \frac{10}{12}\right)x^3 \\
&\quad + \left(\frac{4}{3} - \frac{14}{3} + \frac{25}{6} - \frac{10}{3}\right)x^2 \\
&\quad + \left(-\frac{19}{6} + 8 - \frac{10}{3} + \frac{5}{2}\right)x \\
&\quad + 2 \cdot 1 \\
&= 2 + 4x - \frac{5}{2}x^2 + \frac{1}{2}x^3 \quad \checkmark
\end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned}
p(5) &= 2+20-\frac{125}{2}+\frac{125}{2}=22\\
\tilde{p}(x) &= p(x)+0{,}02\cdot p_2(x)\\
\Rightarrow\ \tilde{p}(5) &= p(5)+0{,}02\cdot p_2(5)\\
&= 22+\frac{2}{100}\cdot\left(-\frac{125}{6}+\frac{125}{6}-\frac{10}{3}\right)\\
&= 22-\frac{1}{10}\cdot\frac{2}{3}\\
&= 22-\frac{1}{15}
\end{aligned}$$

**Aufgabe 16:** Bestimmen Sie ein quadratisches Polynom $p(x)$, das in 0, $\frac{\pi}{2}$ und $\pi$ mit $f(x)=\sin x$ übereinstimmt.
Rechnen Sie den Fehler $|f(x)-p(x)|$ in $x=\frac{\pi}{4}$ explizit aus.

LÖSUNG:

$$\begin{aligned}
f(x) &= \sin x\\
f(0) &= \sin 0 = 0\\
f(\pi/2) &= \sin(\pi/2)=1\\
f(\pi) &= \sin(\pi)=0\\
f(\pi/4) &= \sin(\pi/4)=\frac{\sqrt{2}}{2}
\end{aligned}$$

Gesucht: $p(x)=a_0+a_1x+a_2x^2$ mit $p(0)=0,\ p(\pi/2)=1,\ p(\pi)=0$

**Lagrangeformel:** $p(x)=0\,p_0(x)+1\,p_{\frac{\pi}{2}}(x)+0\,p_\pi(x)$

$$\begin{aligned}
p_{\frac{\pi}{2}}(x) &= \frac{(x-0)(x-\pi)}{(\frac{\pi}{2}-0)(\frac{\pi}{2}-\pi)}\\
&= -\frac{4}{\pi^2}x(x-\pi)=\frac{4}{\pi}x-\frac{4}{\pi^2}x^2
\end{aligned}$$

**Alternativ:**

$$\begin{aligned}
p(0)=0 &\ \Rightarrow\ a_0=0\\
p(\pi/2)=1 &\ \Rightarrow\ a_1\frac{\pi}{2}+a_2\frac{\pi^2}{4}=1\\
&\ \Rightarrow\ 2a_1\pi+a_2\pi^2=4 \quad \mathrm{I}\\
p(\pi)=0 &\ \Rightarrow\ a_1\pi+a_2\pi^2=0 \quad \mathrm{II}
\end{aligned}$$

I-II: $a_1\pi=4\ \Rightarrow\ a_1=\frac{4}{\pi}$
Einsetzen in II: $4+a_2\pi^2=0\ \Leftrightarrow\ a_2=-\frac{4}{\pi^2}$.

**Explizite Berechnung des Fehlers:**

$$|p(\pi/4)-f(\pi/4)|=0,75-0,707106781\approx 0,042893219$$

**Aufgabe 17:** Betrachten Sie die Kurve

$$\gamma : [0,4] \to \mathbb{R}^2, \quad \gamma(t) = \begin{pmatrix} \gamma_1(t) \\ \gamma_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\frac{\pi}{2}t) \\ \sin(\frac{\pi}{2}t) \end{pmatrix}.$$

Interpolieren Sie die beiden Funktionen $\gamma_1(t)$ und $\gamma_2(t)$ durch Polynome $p_1$ und $p_2$ mit den Stützstellen 0, 1, 2, 3 und 4.
Nun definieren wir die Kurve

$$p : [0,4] \to \mathbb{R}^2, \quad p(t) = \begin{pmatrix} p_1(t) \\ p_2(t) \end{pmatrix}.$$

In welchen Punkten schneiden sich die beiden Kurven $\gamma$ und $p$?
Ist $p$ eine geschlossene Kurve?

LÖSUNG: Interpolation von $\cos(\frac{\pi}{2}t)$:

| $t_i$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|
| $y_i$ | 1 | 0 | $-1$ | 0 | 1 |

$p_1(t)$ läßt sich schreiben als

$$p_1(t) = 1 \cdot L_0(t) + (-1) \cdot L_2(t) + 1 \cdot L_4(t),$$

wobei $L_i(t_j) = \delta_{ij}$.

$$\begin{aligned} L_0(t) &= \frac{(t-1)(t-2)(t-3)(t-4)}{(0-1)(0-2)(0-3)(0-4)} \\ &= \frac{1}{24}(t^4 - 10t^3 + 35t^2 - 50t + 24) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} L_2(t) &= \frac{(t-0)(t-1)(t-3)(t-4)}{(2-0)(2-1)(2-3)(2-4)} \\ &= \frac{1}{4}(t^4 - 8t^3 + 19t^2 - 12t) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} L_4(t) &= \frac{(t-0)(t-1)(t-2)(t-3)}{(4-0)(4-1)(4-2)(4-3)} \\ &= \frac{1}{24}(t^4 - 6t^3 + 11t^2 - 6t) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow p_1(t) &= L_0(t) - L_2(t) + L_4(t) \\ &= \frac{1}{24}(t^4 - 10t^3 + 35t^2 - 50t + 24) - \frac{1}{4}(t^4 - 8t^3 + 19t^2 - 12t) + \frac{1}{24}(t^4 - 6t^3 + 11t^2 - 6t) \\ &= \frac{1}{24}(2t^4 - 16t^3 + 46t^2 - 56t + 24) - \frac{1}{4}(t^4 - 8t^3 + 19t^2 - 12t) \\ &= -\frac{1}{6}t^4 + \frac{4}{3}t^3 - \frac{17}{6}t^2 + \frac{2}{3}t + 1 \end{aligned}$$

Interpolation von $\sin(\frac{\pi}{2}t)$:

| $t_i$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|
| $y_i$ | 0 | 1 | 0 | $-1$ | 0 |

$p_2(t)$ läßt sich schreiben als

$$p_2(t) = 1 \cdot L_1(t) + (-1) \cdot L_3(t),$$

wobei $L_i(t_j) = \delta_{ij}$.

$$\begin{aligned} L_1(t) &= \frac{(t-0)(t-2)(t-3)(t-4)}{(1-0)(1-2)(1-3)(1-4)} \\ &= -\frac{1}{6}(t^4 - 9t^3 + 26t^2 - 24t) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} L_3(t) &= \frac{(t-0)(t-1)(t-2)(t-4)}{(3-0)(3-1)(3-2)(3-4)} \\ &= -\frac{1}{6}(t^4 - 7t^3 + 14t^2 - 8t) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow p_2(t) &= L_1(t) - L_3(t) \\ &= -\frac{1}{6}(t^4 - 9t^3 + 26t^2 - 24t) + \frac{1}{6}(t^4 - 7t^3 + 14t^2 - 8t) \\ &= \frac{1}{3}(t^3 - 6t^2 + 8t) \end{aligned}$$

Da wir für die Berechnung von $p$ die Stützstellen 0, 1, 2, 3 und 4 vorgegeben haben, schneiden sich die beiden Kurven $\gamma(t)$ und $p(t)$ in den Punkten

$$\gamma(0) = p(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \gamma(1) = p(1) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$\gamma(2) = p(2) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \gamma(3) = p(3) = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\text{und } \gamma(4) = p(4) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$p(t)$ ist eine geschlossene Kurve, da $p(0) = p(4)$.

**Aufgabe 18:** Zeichnen Sie die beiden Kurven

$$\gamma : [0,4] \to \mathbb{R}^2, \quad \gamma(t) = \begin{pmatrix} \gamma_1(t) \\ \gamma_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\frac{\pi}{2}t) \\ \sin(\frac{\pi}{2}t) \end{pmatrix}$$

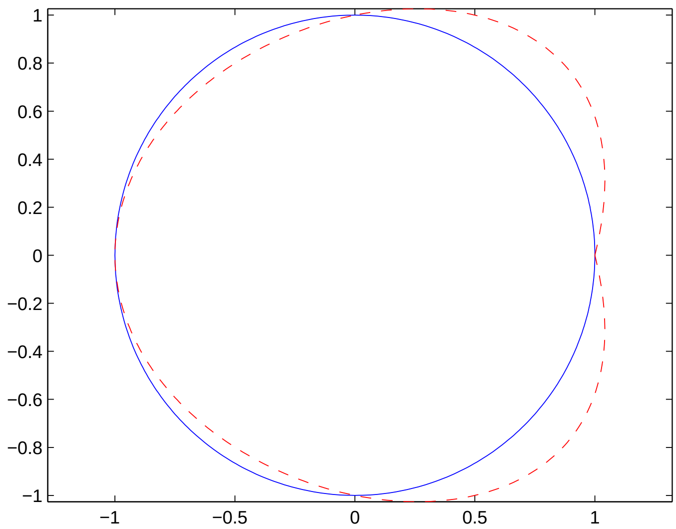
und

$$p : [0,4] \to \mathbb{R}^2, \quad p(t) = \begin{pmatrix} p_1(t) \\ p_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{6}t^4 + \frac{4}{3}t^3 - \frac{17}{6}t^2 + \frac{2}{3}t + 1 \\ \frac{1}{3}(t^3 - 6t^2 + 8t) \end{pmatrix}$$

mit MATLAB.

LÖSUNG:

```
function plotCurveIn2d
% plots two curves in 2d
y = 0:0.01:4;

x_1 = cos(pi*y*0.5);
x_2 = sin(pi*y*0.5);

plot(x_1,x_2)
axis equal

% damit zwei Ausgaben uebereinander gelegt werden koennen
hold on

% y.^4 bedeutet, dass komponentenweise y(i)^4 berechnet wird
z_1 = -1 * y.^4 / 6 + 4 * y.^3 / 3 - 17 * y.^2 / 6 + 2 * y/3 + 1;
z_2 = (y.^3 - 6 * y.^2+ 8 * y) / 3;

% mit 'r--' legt man fest, dass die zweite Ausgabe
% rot und gestrichelt dargestellt wird
plot(z_1,z_2,'r--')

hold off
```




*Die Kurve $\gamma(t)$ ist in blau dargestellt und die Kurve $p(t)$ in rot und gestrichelt.*