Aufgabe 19: Interpolieren Sie die Funktion

$$f(x,y) = \sin(\pi x)\sin(\pi y)$$

auf $[0,1]^2$ mittels bikubischer Polynome ($m = 2$, $n = 3$). Wählen Sie dazu geeignete Knoten und berechnen Sie nur die Lagrangepolynome, die Sie tatsächlich benötigen.

LÖSUNG: Wir wählen äquidistante Knoten (x,y) mit $x,y = 0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1$ (d.h. Knoten mit gleichem abstand), so dass wir für die Interpolation die folgenden Werte vorschreiben:

	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	1
0	0	0	0	0
$\frac{1}{3}$	0	0,75	0,75	0
$\frac{2}{3}$	0	0,75	0,75	0
1	0	0	0	0

Diese Tabelle ist so zu lesen, dass in der ersten Zeile die Werte für y stehen, in der ersten Spalte die Werte für x und in den restlichen Feldern die zugehörigen Werte $f(x,y)$.
Benötigt werden also die Lagrangepolynome
$L_{11}(x,y)$ (für das gilt $L_{11}(x,y) = 1$ für $(x,y) = (\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$, sonst 0),
$L_{12}(x,y)$ (für das gilt $L_{12}(x,y) = 1$ für $(x,y) = (\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$, sonst 0),
$L_{21}(x,y)$ (für das gilt $L_{21}(x,y) = 1$ für $(x,y) = (\frac{2}{3}, \frac{1}{3})$, sonst 0) und
$L_{22}(x,y)$ (für das gilt $L_{22}(x,y) = 1$ für $(x,y) = (\frac{2}{3}, \frac{2}{3})$, sonst 0).

Am einfachsten lassen sich diese zweidimensionalen Lagrangepolynome berechnen, indem man die entsprechenden eindimensionalen Lagrangepolynome miteinander multipliziert. Also berechnen wir die Lagrangepolynome
$L_1(x)$ mit $L_1(x) = 1$ für $x = \frac{1}{3}$, Null sonst und
$L_2(x)$ mit $L_2(x) = 1$ für $x = \frac{2}{3}$ und Null sonst.

$$\begin{aligned} L_1(x) &= \frac{(x-0)(x-\frac{2}{3})(x-1)}{(\frac{1}{3}-0)(\frac{1}{3}-\frac{2}{3})(\frac{1}{3}-1)} \\ &= \frac{9}{2}x(3x-2)(x-1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} L_2(x) &= \frac{(x-0)(x-\frac{1}{3})(x-1)}{(\frac{2}{3}-0)(\frac{2}{3}-\frac{1}{3})(\frac{2}{3}-1)} \\ &= -\frac{9}{2}x(3x-1)(x-1) \end{aligned}$$

Daraus folgt

$$
\begin{aligned}
L_{11}(x,y) &= L_1(x)L_1(y) \\
&= \frac{9}{2}x(3x-2)(x-1)\frac{9}{2}y(3y-2)(y-1) \\
&= 20\frac{1}{4}x(3x-2)(x-1)y(3y-2)(y-1)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
L_{12}(x,y) &= L_{21}(x,y) \\
&= L_1(x)L_2(y) \\
&= -\frac{9}{2}x(3x-2)(x-1)\frac{9}{2}y(3y-1)(y-1) \\
&= -20\frac{1}{4}x(3x-2)(x-1)y(3y-1)(y-1)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
L_{22}(x,y) &= L_2(x)L_2(y) \\
&= -\frac{9}{2}x(3x-1)(x-1)\left[-\frac{9}{2}y(3y-1)(y-1)\right] \\
&= 20\frac{1}{4}x(3x-1)(x-1)y(3y-1)(y-1)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\Rightarrow p(x,y) &= 0{,}75\,[L_{11}(x,y)+L_{12}(x,y)+L_{21}(x,y)+L_{22}(x,y)] \\
&= 0{,}75\,[L_{11}(x,y)+2L_{12}(x,y)+L_{22}(x,y)] \\
&= 15\frac{3}{16}xy\,[(3x-2)(x-1)(3y-2)(y-1) \\
&\quad -2(3x-2)(x-1)(3y-1)(y-1) \\
&\quad +(3x-1)(x-1)(3y-1)(y-1)] \\
&= 15\frac{3}{16}xy(x-1)(y-1)\,[(3x-2)(3y-2) \\
&\quad -2(3x-2)(3y-1)+(3x-1)(3y-1)]
\end{aligned}
$$

Aufgabe 20: Betrachten Sie die Funktion

$$f(x) = \frac{1}{1+25x^2}, \qquad x \in [-1,1].$$

a) Bestimmen Sie die Interpolationspolynome vom Grad m

$$p_m(x) = a_m x^m + a_{m-1}x^{m-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$

bzgl. $f(x)$ für $m = 4, 8, 16$ mit den Stützstellen

$$x_i = \frac{2 \cdot i}{m} - 1, \quad i = 0, \ldots, m.$$

Nutzen Sie zum aufstellen und lösen des Gleichungssystems Matlab. Zeichnen Sie die Graphen der Funktionen $f(x)$ und $p_m(x)$.

b) Bestimmen Sie die stückweise affine Interpolation $s_m(x)$ bzgl. $f(x)$ mit den Stützstellen

$$x_i = \frac{2 \cdot i}{m} - 1, \quad i = 0, \ldots, m.$$

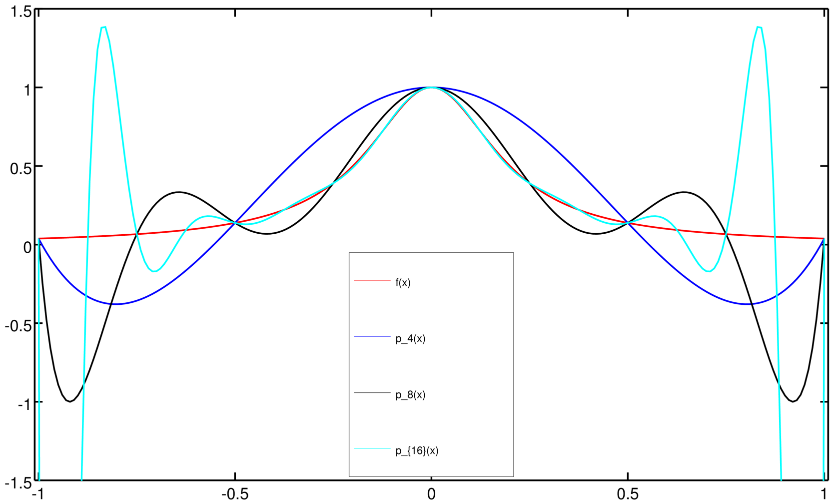
für $m = 4, 8, 16$ mittels Matlab. Zeichnen Sie die Graphen der Funktionen $f(x)$ und $s_m(x)$.

c) Vergleichen Sie die Ergebnisse der beiden Verfahren.

LÖSUNG:

a)
```
function RungesPhaenomen()

  % Intervall x = [-1,1]
  x = erzeugeGitter( 200 );

  % Berechung von Rungesfunktion auf Intervall x
  f = RungesFunktion( x );

  % Berechnung der Polynomkoeffizienten fuer m = 4,8,16
  a_4 = polynomInterpolation( 4 );
  a_8 = polynomInterpolation( 8 );
  a_16 = polynomInterpolation( 16 );

  % Berechnung der dazugehoerigen Polynome p_m
  p_4 = polynom( a_4, x );
  p_8 = polynom( a_8, x );
  p_16 = polynom( a_16, x );

  % Visualisierung
  figure;
  hold on;
```

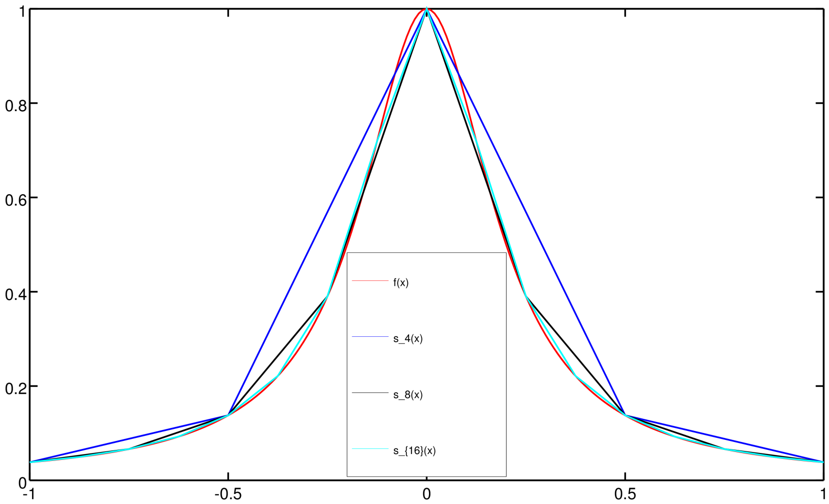
```
  plot( x, f, 'r','linewidth',3 );
  plot( x, p_4, 'b','linewidth',3 );
  plot( x, p_8, 'k','linewidth',3 );
  plot( x, p_16, 'c','linewidth',3 );
  axis([-1.01 1.01 -1.5 1.5]);
  h = legend('f(x)','p_4(x)','p_8(x)','p_{16}(x)','Location','south');
  set(gca, 'linewidth', 3, 'fontsize', 30,'interpreter','tex');
  set (h, 'fontsize', 20);
  set (h, 'fontweight', 'bold');
  hold off;
endfunction

% Erzeugung eines Gitters mit N + 1 StÃ¼tzstellen
function x = erzeugeGitter( N )
  for i=1:N+1
    x(i) = 2 * (i - 1) / N - 1;
  end
endfunction

% Funktion zur Berechnung der Polynomkoeffizienten a
% des Polynominterpolationsproblems
function a = polynomInterpolation( m )
  % Stuetzstellen x_i
  for i=1:m+1
    x_i(i) = 2 * (i - 1) / m - 1;
  end
  % Aufstellen der Vandermonde-Matrix
  for i=1:m+1
    for j=1:m+1
      A(i,j) = x_i(i)^(j-1);
    end
  end
  % Aufstellen der rechten Seite b_i = f(x_i)
  for i=1:m+1
    b(i,1) = RungesFunktionswert( x_i(i) );
  end
  % Loesen des Gleichungssystems
  a = A\b;
endfunction

% Funktion zur Berechnung eines Polynoms vom Grad m
% auf dem Intervall x mit N + 1 Stuetzstellen
function p = polynom( a , x )
  % Anzahl der Intervalle
  N = length(x)-1;
  % Polynomgrad
```




```
  m = length(a)-1;
  % Initialisierung mit 0
  p = zeros(N+1,1);
  for i=1:N+1
    for j=1:m+1
      p(i) = p(i) + a(j) * x(i)^(j-1);
    end
  end
endfunction

% Funktion zur Auswertung von f(x) = 1/(1+25*x^2) auf dem Interval x
function f = RungesFunktion(x)
  % Anzahl der Intervalle
  N = length(x) - 1;
  for i=1:N+1
    f(i) = RungesFunktionswert( x(i) );
  end
endfunction

% Funktion zur Auswertung von f(x) = 1/(1+25*x^2) an der Stelle x_i
function f = RungesFunktionswert( x_i )
  f = 1/(1 + 25 * x_i^2);
endfunction
```

b)
```
function StueckweiseInterpolation()

  % Intervall x = [-1,1]
  x = erzeugeGitter( 200 );
```

```
  % Berechung von Rungesfunktion auf Intervall x
  f = RungesFunktion( x );

  % Berechnung der Stuetzstellen fuer m = 4,8,16
  x_4 = erzeugeGitter( 4 );
  x_8 = erzeugeGitter( 8 );
  x_16 = erzeugeGitter( 16 );

  % Berechnung der dazugehoerigen stueckweise affinen Funktionen s_m
  s_4 = RungesFunktion( x_4 );
  s_8 = RungesFunktion( x_8 );
  s_16 = RungesFunktion( x_16 );

  % Visualisierung
  figure;
  hold on;
  plot( x, f, 'r','linewidth',3 );
  plot( x_4, s_4, 'b','linewidth',3 );
  plot( x_8, s_8, 'k','linewidth',3 );
  plot( x_16, s_16, 'c','linewidth',3 );
  h = legend( 'f(x)','s_4(x)', 's_8(x)', 's_{16}(x)','Location','south');
  set(gca, 'linewidth', 3, 'fontsize', 30,'interpreter','tex');
  set (h, 'fontsize', 20);
  set (h, 'fontweight', 'bold');
  hold off;
endfunction

% Erzeugung eines Gitters mit N + 1 StÃ¼tzstellen
function x = erzeugeGitter( N )
  for i=1:N+1
    x(i) = 2 * (i - 1) / N - 1;
  end
endfunction

% Funktion zur Auswertung von f(x) = 1/(1+25*x^2) auf dem Interval x
function f = RungesFunktion(x)
  % Anzahl der Intervalle
  N = length(x) - 1;
  for i=1:N+1
    f(i) = RungesFunktionswert( x(i) );
  end
endfunction

% Funktion zur Auswertung von f(x) = 1/(1+25*x^2) an der Stelle x_i
function f = RungesFunktionswert( x_i )
  f = 1/(1 + 25 * x_i^2);
```




```
endfunction
```

c) Bei der Polynominterpolation in Teilaufgabe a) wächst der Fehler mit steigendem Polynomgrad m (und entsprechend steigender Anzahl an Stützstellen x_i). Bei der stückweise affinen Interpolation in Teilaufgabe b) sinkt der Fehler mit steigender Anzahl an Stützstellen x_i.

Aufgabe 21: Gegeben sei ein Dreieck mit den Eckpunkten $a_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $a_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \end{pmatrix}$ und $a_2 = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \end{pmatrix}$. Berechnen Sie die baryzentrischen Koordinaten der Punkte $p_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 4{,}6 \end{pmatrix}$ und $p_2 = \begin{pmatrix} 3{,}7 \\ 2{,}1 \end{pmatrix}$ bezüglich dieses Dreiecks. Liegen p_1 bzw. p_2 im Innern dieses Dreiecks?

LÖSUNG: Die baryzentrischen Koordinaten des Punktes p_i bezüglich des Dreiecks mit den Eckpunkten a_0, a_1 und a_2 kann man berechnen, indem man das folgende Gleichungssystem löst

$$\begin{pmatrix} \vdots & \vdots \\ a_1 - a_0 & a_2 - a_0 \\ \vdots & \vdots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} = p_i - a_0$$

und die nullte Komponente der baryzentrischen Koordinate wie folgt berechnet

$$\lambda_0 = 1 - \lambda_1 - \lambda_2.$$

p_1 in baryzentrischen Koordinaten:

$$
\begin{aligned}
\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 2 \\ 2{,}6 \end{pmatrix} \\
\Rightarrow \qquad \lambda_2 &= 2{,}6 - 5\lambda_1 \\
3\lambda_1 + 5(2{,}6 - 5\lambda_1) &= 2 \\
\Rightarrow \qquad \lambda_1 &= \frac{1}{2} \\
\lambda_2 &= 2{,}6 - 5 \cdot \frac{1}{2} = 0{,}1
\end{aligned}
$$

$\Rightarrow \lambda_0 = 1 - 0{,}5 - 0{,}1 = 0{,}4$
d.h. p_1 sieht in baryzentrischen Koordinaten wie folgt aus: $(0.4, 0.5, 0.1)$.
Der Punkt p_1 liegt im gegebenen Dreieck, da für λ_i mit $i = 0, 1, 2$ gilt $0 \leq \lambda_i \leq 1$.

p_2 in baryzentrischen Koordinaten:

$$
\begin{aligned}
\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 2{,}7 \\ 0{,}1 \end{pmatrix} \\
\Rightarrow \qquad \lambda_2 &= 0{,}1 - 5\lambda_1 \\
3\lambda_1 + 5(0{,}1 - 5\lambda_1) &= 2{,}7 \\
\Rightarrow \qquad \lambda_1 &= -0{,}1 \\
\lambda_2 &= 0{,}1 - 5(-0{,}1) = 0{,}6
\end{aligned}
$$

$\Rightarrow \lambda_0 = 1 + 0{,}1 - 0{,}6 = 0{,}5$
d.h. p_2 sieht in baryzentrischen Koordinaten wie folgt aus: $(0.5, -0.1, 0.6)$.
Der Punkt p_2 liegt nicht im gegebenen Dreieck, da $\lambda_1 < 0$.