Aufgabe 22: Betrachten Sie die Funktion

$$f : [-1; 1] \to \mathbb{R}, \qquad f(x) = (x^2 - 1)^2.$$

a) Berechnen Sie das Integral

$$\int_{-1}^{1} f(x)\, dx.$$

b) Betrachten Sie die Quadraturformel mit vier gleichmäßig verteilten Knoten ($n = 3$) auf dem Intervall $[-1; 1]$, d.h.

$$x_0 = -1, \quad x_1 = -\frac{1}{3}, \quad x_2 = \frac{1}{3}, \quad x_3 = 1.$$

Berechnen Sie die zugehörigen Gewichte.

Verwenden Sie die Quadraturformel zur Approximation des Integrals aus Teil a).

c) Betrachten Sie die Gauß-Quadratur mit drei Knoten auf dem Intervall $[-1; 1]$.

Berechnen Sie das Legendre-Polynom dritten Grades

$$P_3(x) = \frac{3!}{6!} \frac{d^3}{dx^3} (x^2 - 1)^3.$$

Berechnen Sie die Nullstellen von P_3 – d.h. die Knoten der Gauß-Quadratur.

Berechnen Sie die zugehörigen Gewichte.

Verwenden Sie die Quadraturformel zur Approximation des Integrals aus Teil a).

Aufgabe 23: Gegeben sei die Funktion

$$f : [-1, 1] \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \sqrt{1 - x^2}$$

sowie die Knoten $x_0 = -1$, $x_1 = 0$ und $x_2 = 1$.

a) Berechnen Sie die Lagrange-Basis zu den oben angegebenen Knoten.

b) Berechnen Sie die Lagrange-Interpolation der Funktion $f(x)$ zu diesen Knoten.

c) Geben Sie die Quadraturformel (numerische Integrationsformel) zur Approximation eines Integrals von -1 bis 1 mit den Knoten $x_0 = -1$, $x_1 = 0$ und $x_2 = 1$ an.

d) Wenden Sie die Quadraturformel zur näherungsweisen Berechnung des Integrals

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx$$

an.

e) Welche geometrische Figur beschreibt der Graph der Funktion f?

f) Geben Sie den exakten Wert des Integrals

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx$$

an. (ohne Rechnung)

Aufgabe 24: Berechnen Sie einen Näherungwert für $\frac{\pi}{4} = 0,7854\ldots$ durch numerische Approximation des Integrals $\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$. Teilen Sie dazu das Intervall $[0, 1]$ in vier Teilintervalle und verwenden für jedes Teilintervall dieselbe Quadraturformel, nämlich

a) die Trapezregel bzw.

b) die Keplersche Fassregel.

Vergleichen Sie die Ergebnisse.

Aufgabe 25: Schreiben Sie eine `MATLAB`-Funktion `TrapezIntegration(a,b,h)`, welche das Integral über eine gegebene Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ mit der Trapezregel

$$T(h) = h\left(\frac{f(a)}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} f(a+ih) + \frac{f(b)}{2}\right)$$

berechnet. Die Argumente `a,b` sind die Intervallgrenzen, `h` ist die Feinheit der Intervallzerlegung. Verwenden Sie bitte folgendes Programmgerüst:

```
function value = TrapezIntegration( a, b, h )
% Berechnet das Integral einer gegebenen Funktion
% mit der Trapezregel.
% Argumente a,b sind die Intervallgrenzen,
% h ist die Feinheit der Intervallzerlegung.

% Hilfsfunktion: Funktion f auswerten
function f = evaluateF( x )
  ...
end

% Hauptprogramm:
...

end
```

Testen Sie Ihr Programm mit der Funktion $f(x) = x^2$ auf dem Intervall $[a,b] = [0,1]$. Erstellen Sie eine Konvergenztabelle für die Gitterfeinheiten $h = 0.1, 0.05, 0.025, 0.0125, 0.00625$, d. h. berechnen Sie zu diesen Feinheiten den Fehler zwischen dem berechneten und dem exakten Wert des Integrals.