Aufgabe 22: Betrachten Sie die Funktion

$$f : [-1;1] \to \mathbb{R}, \qquad f(x) = (x^2-1)^2.$$

a) Berechnen Sie das Integral

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx.$$

b) Betrachten Sie die Quadraturformel mit vier gleichmäßig verteilten Knoten ($n = 3$) auf dem Intervall $[-1;1]$, d.h.

$$x_0 = -1, \quad x_1 = -\frac{1}{3}, \quad x_2 = \frac{1}{3}, \quad x_3 = 1.$$

Berechnen Sie die zugehörigen Gewichte.

Verwenden Sie die Quadraturformel zur Approximation des Integrals aus Teil a).

c) Betrachten Sie die Gauß-Quadratur mit drei Knoten auf dem Intervall $[-1;1]$.

Berechnen Sie das Legendre-Polynom dritten Grades

$$P_3(x) = \frac{3!}{6!}\frac{d^3}{dx^3}(x^2-1)^3.$$

Berechnen Sie die Nullstellen von P_3 – d.h. die Knoten der Gauß-Quadratur.

Berechnen Sie die zugehörigen Gewichte.

Verwenden Sie die Quadraturformel zur Approximation des Integrals aus Teil a).

LÖSUNG:

a) Zur Berechnung des Integrals betrachten wir die Monome der Funcktion $f(x)$, d.h. $f(x) = (x^4 - 2x^2 + 1)$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{1} f(x)\,dx &= \int_{-1}^{1} (x^2-1)^2\,dx = \int_{-1}^{1} (x^4 - 2x^2 + 1)\,dx \\
&= \left[\frac{1}{5}x^5 - \frac{2}{3}x^3 + x\right]_{-1}^{1} = [(\frac{1}{5} - \frac{2}{3} + 1) + (\frac{1}{5} - \frac{2}{3} + 1)] \\
&= \frac{2}{5} - \frac{4}{3} + 2 = \frac{1}{15}(6 - 20 + 30) = \frac{16}{15}.
\end{aligned}$$

b) Zunächst berechnen wir die Lagrange-Funcktion L_0. Hier gilt

$$\begin{aligned} L_0(x) &= \frac{x+\frac{1}{3}}{-1+\frac{1}{3}} \frac{x-\frac{1}{3}}{-1-\frac{1}{3}} \frac{x-1}{-1-1} \\ &= \frac{x^3-x^2-\frac{1}{9}x+\frac{1}{9}}{-\frac{16}{9}} = -\frac{9}{16}x^3+\frac{9}{16}x^2+\frac{1}{16}x-\frac{1}{16} \end{aligned}$$

und somit

$$\omega_0 = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} L_0(x)\,dx = \frac{1}{8}.$$

Da das Gewicht unabhängig vom konkreten Intervall ist, kann man sich mit den Knoten $0,1,2,3$ auf dem Intervall $[0;3]$ die Rechnung deutlich vereinfachen.

Aufgrund der Symmetrie gilt $\omega_3 = \frac{1}{8}$, also $\omega_1+\omega_2 = \frac{6}{8}$. Wieder aufgrund der Symmetrie erhalten wir $\omega_1 = \omega_2 = \frac{3}{8}$.

Setzen wir dies ein, so erhalten wir

$$\begin{aligned} \int_{-1}^{1} f(x)\,dx &\approx (b-a)\cdot\sum_{i=0}^{3} w_i\cdot f(x_i) \\ &= 2\cdot(\frac{1}{8}\cdot 0+\frac{3}{8}\cdot\frac{64}{81}+\frac{3}{8}\cdot\frac{64}{81}+\frac{1}{8}\cdot 0) = \frac{96}{81} = \frac{32}{27} \neq \frac{16}{15}. \end{aligned}$$

c) Das Legendre-Polynom dritten Grades lautet

$$P_3(x) = x^3-\frac{3}{5}x.$$

Die Nullstellen der Funktion sind die Quadratur-Punkte, d.h.

$$x_0 = -\sqrt{\frac{3}{5}}, \quad x_1 = 0, \quad x_2 = \sqrt{\frac{3}{5}}.$$

Dann gilt

$$\begin{aligned} L_1(x) &= \frac{x-\sqrt{\frac{3}{5}}}{0-\sqrt{\frac{3}{5}}} \frac{x+\sqrt{\frac{3}{5}}}{0+\sqrt{\frac{3}{5}}} \\ &= \frac{x^2-\frac{3}{5}}{-\frac{3}{5}} = -\frac{5}{3}x^2+1 \end{aligned}$$

und somit

$$\omega_1 = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} L_1(x)\,dx = \frac{4}{9}.$$

Aufgrund der Addition zur Eins Eigenschaft, d.h. $\omega_0+\omega_1+\omega_2 = 1$ und der Symmetrie, d.h. $\omega_0 = \omega_2$, erhalten wir $\omega_0 = \omega_2 = \frac{5}{18}$.

Somit gilt

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx \approx (b-a)\cdot \sum_{i=0}^{2} w_i \cdot f(x_i)$$
$$= 2\cdot(\frac{5}{18}\cdot\frac{4}{25}+\frac{4}{9}\cdot 1+\frac{5}{18}\cdot\frac{4}{25}) = \frac{2}{9}\frac{4}{5}+\frac{8}{9} = \frac{8+8\cdot 5}{45} = \frac{48}{45} = \frac{16}{15}$$

Aufgabe 23: Gegeben sei die Funktion

$$f : [-1,1] \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \sqrt{1-x^2}$$

sowie die Knoten $x_0 = -1$, $x_1 = 0$ und $x_2 = 1$.

a) Berechnen Sie die Lagrange-Basis zu den oben angegebenen Knoten.

b) Berechnen Sie die Lagrange-Interpolation der Funktion $f(x)$ zu diesen Knoten.

c) Geben Sie die Quadraturformel (numerische Integrationsformel) zur Approximation eines Integrals von -1 bis 1 mit den Knoten $x_0 = -1$, $x_1 = 0$ und $x_2 = 1$ an.

d) Wenden Sie die Quadraturformel zur näherungsweisen Berechnung des Integrals
$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx$$
an.

e) Welche geometrische Figur beschreibt der Graph der Funktion f?

f) Geben Sie den exakten Wert des Integrals
$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx$$
an. (ohne Rechnung)

LÖSUNG:

a)

$$L_0(x) = \frac{x-x_1}{x_0-x_1}\frac{x-x_2}{x_0-x_2} = \frac{x}{-1}\frac{x-1}{-1-1} = \frac{1}{2}x(x-1)$$
$$L_1(x) = \frac{x-x_0}{x_1-x_0}\frac{x-x_2}{x_1-x_2} = \frac{x+1}{1}\frac{x-1}{-1} = -(x+1)(x-1)$$
$$L_2(x) = \frac{x-x_0}{x_2-x_0}\frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{x+1}{1+1}\frac{x-0}{1-0} = \frac{1}{2}x(x+1)$$

b)

$$p(x) = f(-1)L_0(x)+f(0)L_1(x)+f(1)L_2(x) = L_1(x) = -(x+1)(x-1) = -x^2+1$$

c)

$$
\begin{aligned}
w_0 &= \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} L_0(x)\,dx = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} \frac{1}{2}(x^2-x)\,dx = \frac{1}{4}\left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2\right]_{-1}^{1} = \frac{1}{4}\left[\frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{2}\right] = \frac{1}{6}\\
w_1 &= \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} L_1(x)\,dx = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} 1-x^2\,dx = \frac{1}{2}\left[x - \frac{1}{3}x^3\right]_{-1}^{1} = \frac{1}{2}\left[1 - \frac{1}{3} + 1 - \frac{1}{3}\right] = \frac{2}{3}\\
w_2 &= \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} L_2(x)\,dx = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} \frac{1}{2}(x^2+x)\,dx = \frac{1}{4}\left[\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2\right]_{-1}^{1} = \frac{1}{4}\left[\frac{1}{3} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{2}\right] = \frac{1}{6}
\end{aligned}
$$

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx \approx 2\left(\frac{1}{6}f(x_0) + \frac{2}{3}f(x_1) + \frac{1}{6}f(x_2)\right)$$

d)

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx \approx 2\left(\frac{1}{6}\,0 + \frac{2}{3}\,1 + \frac{1}{6}\,0\right) = \frac{4}{3} \approx 1.33$$

e) Oberer Halbkreis.

f) $\frac{1}{2}\pi r^2 = \frac{1}{2}\pi \approx 1.57$

Aufgabe 24: Berechnen Sie einen Näherungwert für $\frac{\pi}{4} = 0,7854\ldots$ durch numerische Approximation des Integrals $\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$. Teilen Sie dazu das Intervall $[0,1]$ in vier Teilintervalle und verwenden für jedes Teilintervall dieselbe Quadraturformel, nämlich

a) die Trapezregel bzw.

b) die Keplersche Fassregel.

Vergleichen Sie die Ergebnisse.

LÖSUNG:

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \arctan 1 = \frac{\pi}{4} = 0,7854\ldots$$

a) Trapezregel:

$$a = 0, b = 1, h = \frac{1}{4}, n = 4, f(x) = \frac{1}{1+x^2} \;:$$

$$
\begin{aligned}
T &= \frac{1}{4}\left\{\frac{f(0)}{2} + f\left(\frac{1}{4}\right) + f\left(\frac{2}{4}\right) + f\left(\frac{3}{4}\right) + \frac{f(1)}{2}\right\} \\
&= \frac{1}{4}\left\{\frac{1}{2} + \frac{1}{1+\frac{1}{16}} + \frac{1}{1+\frac{1}{4}} + \frac{1}{1+\frac{9}{16}} + \frac{1}{4}\right\} \\
&= \frac{1}{4}\left\{\frac{3}{4} + \frac{16}{17} + \frac{4}{5} + \frac{16}{25}\right\} \\
&= \frac{3}{16} + \frac{4}{17} + \frac{1}{5} + \frac{4}{25} \\
&= \frac{4}{17} + \frac{3}{16} + \frac{9}{25} \\
&= \frac{4}{17} + \frac{3 \cdot 5^4 + 9 \cdot 16}{10000} \\
&= \frac{4}{17} + \frac{1875 + 144}{10000} \\
&= \frac{2019}{10000} + \frac{4}{17} \\
&= 0,2019 + \frac{4}{17} \\
&= 0,2019 + 0,235294118 = 0,437194118
\end{aligned}
$$

b) Simpsonregel:

$$
\begin{aligned}
S &= \frac{1}{24}\left\{f(0) + 2f\left(\frac{1}{4}\right) + 2f\left(\frac{1}{2}\right) + 2f\left(\frac{3}{4}\right)\right. \\
&\quad \left. +4f\left(\frac{1}{8}\right) + 4f\left(\frac{3}{8}\right) + 4f\left(\frac{5}{8}\right) + 4f\left(\frac{7}{8}\right) + f(1)\right\} \\
&= \frac{1}{24}\left\{1 + 2 \cdot \frac{1}{1+\frac{1}{16}} + 2 \cdot \frac{1}{1+\frac{1}{4}} + 2 \cdot \frac{1}{1+\frac{9}{16}}\right. \\
&\quad \left. +4 \cdot \frac{1}{1+\frac{1}{64}} + 4 \cdot \frac{1}{1+\frac{9}{64}} + 4 \cdot \frac{1}{1+\frac{25}{64}} + 4 \cdot \frac{1}{1+\frac{49}{64}} + \frac{1}{2}\right\} \\
&= \frac{1}{24}\left[\frac{3}{2} + \frac{32}{17} + \frac{8}{5} + \frac{32}{25} + \frac{256}{65} + \frac{256}{73} + \frac{256}{89} + \frac{256}{113}\right] \\
&= \frac{1}{16} + \frac{4}{51} + \frac{1}{15} + \frac{4}{75} + \frac{32}{195} + \frac{32}{219} + \frac{32}{267} + \frac{32}{339} \\
&= 0,0625 + 0,078431373 + 0,066666667 + 0,053333333 \\
&\quad +0,164102564 + 0,146118721 + 0,119850187 + 0,09439528 \\
&= 0,785398125 \approx 0,7854 \quad \checkmark
\end{aligned}
$$

Aufgabe 25: Schreiben Sie eine `MATLAB`-Funktion `TrapezIntegration(a,b,h)`, welche das Integral über eine gegebene Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ mit der Trapezregel

$$T(h) = h\left(\frac{f(a)}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} f(a+ih) + \frac{f(b)}{2}\right)$$

berechnet. Die Argumente `a,b` sind die Intervallgrenzen, `h` ist die Feinheit der Intervallzerlegung. Verwenden Sie bitte folgendes Programmgerüst:

```
function value = TrapezIntegration( a, b, h )
% Berechnet das Integral einer gegebenen Funktion
% mit der Trapezregel.
% Argumente a,b sind die Intervallgrenzen,
% h ist die Feinheit der Intervallzerlegung.

% Hilfsfunktion: Funktion f auswerten
function f = evaluateF( x )
  ...
end

% Hauptprogramm:
...

end
```

Testen Sie Ihr Programm mit der Funktion $f(x) = x^2$ auf dem Intervall $[a,b] = [0,1]$. Erstellen Sie eine Konvergenztabelle für die Gitterfeinheiten $h = 0.1, 0.05, 0.025, 0.0125, 0.00625$, d. h. berechnen Sie zu diesen Feinheiten den Fehler zwischen dem berechneten und dem exakten Wert des Integrals.

LÖSUNG:

```
function value = TrapezIntegration( a, b, h )
% Berechnet das Integral einer gegebenen Funktion mit der Trapezregel.
% Argumente a,b sind die Intervallgrenzen,
% h ist die Feinheit der Intervallzerlegung.

% Hilfsfunktion: Funktion f auswerten
function f = evaluateF( x )
  f = x*x;
end

% Hauptprogramm:
% Die Berechnung des Integrals
value = 0;
```

```
% Die beiden Randwerte
value = value + evaluateF(a) / 2;
value = value + evaluateF(b) / 2;

% Anzahl der Teilintervalle
n = (b-a) / h;

% Iteriere ueber die Teilintervalle
for i=1:n-1
  value = value + evaluateF(a + i*h);
end

% anschliessend multipliziere alles mit h
value = value * h;
end
```

Der exakte Wert des Integrals ist $\frac{1}{3}$, damit sieht die Konvergenztabelle folgendermaßen aus:

Gitterweite h	0.1	0.05	0.025	0.0125	0.00625
Fehler	0.0016667	0.00041667	0.00010417	2.6042e-05	6.5104e-06

Man sieht, dass sich der Fehler viertelt, wenn die Gitterweiter halbiert wird.