

Aufgabe 26: Welche der folgenden Gleichungen sind richtig?

- | | | |
|---|-----------------------------|-------------------------------|
| a) $e^{i\frac{\pi}{2}} = -i.$ | ja <input type="checkbox"/> | nein <input type="checkbox"/> |
| b) $e^{i\frac{\pi}{2}} = i.$ | ja <input type="checkbox"/> | nein <input type="checkbox"/> |
| c) $e^{i\frac{\pi}{4}} = -\sqrt{i}.$ | ja <input type="checkbox"/> | nein <input type="checkbox"/> |
| d) $e^{i\frac{\pi}{4}} = \sqrt{i}.$ | ja <input type="checkbox"/> | nein <input type="checkbox"/> |
| e) $e^{i\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{2}(1+i).$ | ja <input type="checkbox"/> | nein <input type="checkbox"/> |

LÖSUNG:

- a) Nein!
- b) Ja!
- c) Nein!
- d) Ja!
- e) Ja!

Begründung:

Die Eulersche Formel lautet: $e^{ix} = \cos x + i \sin x$. Daraus ergibt sich:

$$e^{i\frac{\pi}{2}} = \cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} = 0 + i \cdot 1 = i,$$

wegen $\cos \frac{\pi}{2} = 0$ und $\sin \frac{\pi}{2} = 1$.

Wegen

$$e^{i(-\frac{\pi}{2})} = \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \cos \frac{\pi}{2} - i \sin \frac{\pi}{2} = 0 - i \cdot 1 = -i,$$

da $\cos(-x) = \cos x$ (\cos ist gerade!) und $\sin(-x) = -\sin x$ (\sin ist ungerade!), gilt also

- a) Nein!
- b) Ja!

Wegen $e^{i\frac{\pi}{2}} = i$ gilt $e^{i\frac{\pi}{4}} = (e^{i\frac{\pi}{2}})^{1/2} = \pm i^{1/2} = \pm \sqrt{i}$.

Die Eulersche Formel besagt:

$$e^{i\frac{\pi}{4}} = \cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4}.$$

$\frac{\pi}{4}$ entspricht einem Winkel von 45° .

Behauptung: $\cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \sin \frac{\pi}{4}$.

Nachweis:

- $\cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \Rightarrow \cos \frac{\pi}{4} = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) = \sin \frac{\pi}{4}$.
- $\sin(2x) = 2 \sin x \cos x$ (folgt aus Additionstheorem für sin!)

$$\begin{aligned} \Rightarrow 1 &= \sin \frac{\pi}{2} = \sin\left(2 \frac{\pi}{4}\right) = 2 \sin \frac{\pi}{4} \cos \frac{\pi}{4} \\ \Rightarrow \frac{1}{2} &= \sin^2 \frac{\pi}{4} \quad \text{wegen } \sin \frac{\pi}{4} = \cos \frac{\pi}{4} \\ \Rightarrow \sin \frac{\pi}{4} &= \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{wegen } \sin \frac{\pi}{4} > 0! \end{aligned}$$

Also gilt:

$$\begin{aligned} e^{i\frac{\pi}{4}} &= \cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2}(1 + i) \end{aligned}$$

d.h. es gilt:

e) Ja!

Weiter gilt:

$$\begin{aligned} \left[\frac{\sqrt{2}}{2}(1 + i) \right]^2 &= \frac{2}{4}(1 + i)^2 = \frac{1}{2}(1 + 2i + i^2) \\ &= \frac{1}{2}(1 + 2i - 1) = i. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \sqrt{i} &= \sqrt{e^{i\frac{\pi}{2}}} = e^{i\frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2}(1 + i), \\ -\sqrt{i} &= -\sqrt{e^{i\frac{\pi}{2}}} = -e^{i\frac{\pi}{4}} = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)(1 + i). \end{aligned}$$

Also:

c) Nein!

d) Ja!

Aufgabe 27: Lösen Sie die folgenden Gleichungen in \mathbb{C} . Geben Sie die Lösungen in der Form $z = x + iy$ mit $x, y \in \mathbb{R}$ an.

a) $z^3 = -8$

b) $z^2 = i$

c) $z^4 = -16$

d) $z = \frac{2+i}{2-i}$

Achtung: Berechnen Sie alle Lösungen!

LÖSUNG:

a) $z^3 = -8$ hat 3 Lösungen.

$$\begin{aligned}
 z^3 = -8 &= 8e^{i\pi} && = 8e^{3i\pi} && = 8e^{5i\pi} \\
 \Leftrightarrow z &= 2e^{i\frac{\pi}{3}} && \text{oder } z = 2e^{3i\frac{\pi}{3}} && \text{oder } z = 2e^{5i\frac{\pi}{3}} \\
 \Leftrightarrow z &= 2e^{i\frac{\pi}{3}} && \text{oder } z = 2e^{i\pi} && \text{oder } z = 2e^{-i\frac{\pi}{3}} \\
 \Leftrightarrow z &= 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right) && \text{oder } z = -2 && \text{oder } z = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} - i\sin\frac{\pi}{3}\right) \\
 \Leftrightarrow z &= 2\left(\frac{1}{2} + i\sqrt{\frac{3}{4}}\right) && \text{oder } z = -2 && \text{oder } z = 2\left(\frac{1}{2} - i\sqrt{\frac{3}{4}}\right) \\
 \Leftrightarrow z &= 1 + i\sqrt{3} && \text{oder } z = -2 && \text{oder } z = 1 - i\sqrt{3}
 \end{aligned}$$

Alternativ: 1. Lösung ist klar: $z_1 = -2$: $(-2)^3 = -8$ ✓ Polynomdivision:

$$\begin{array}{r}
 (z^3 + 8) : (z + 2) = z^2 - 2z + 4 \\
 -(z^3 + 2z^2) \\
 \hline
 -2z^2 + 8 \\
 -(-2z^2 - 4z) \\
 \hline
 4z + 8 \\
 -(4z + 8) \\
 \hline
 0
 \end{array}$$

Probe: $(z^2 - 2z + 4)(z + 2) = z^3 - 2z^2 + 4z + 2z^2 - 4z + 8 = z^3 + 8$ ✓

Berechnung der 2. und 3. Lösung:

$$\begin{aligned}
 z^2 - 2z + 4 = 0 &\Leftrightarrow z^2 - 2z + 1 + 3 = 0 \\
 &\Leftrightarrow (z - 1)^2 + 3 = 0 \\
 &\Leftrightarrow (z - 1)^2 - 3i^2 = 0 \\
 &\Leftrightarrow (z - 1)^2 - (\sqrt{3}i)^2 = 0 \\
 &\Leftrightarrow (z - 1 - i\sqrt{3})(z - 1 + i\sqrt{3}) = 0 \\
 &\Leftrightarrow \boxed{z_2 = 1 + i\sqrt{3}}, \boxed{z_3 = 1 - i\sqrt{3}}
 \end{aligned}$$

Probe:

$$\begin{aligned}(1 + i\sqrt{3})^3 &= (1 + i\sqrt{3})^2 (1 + i\sqrt{3}) \\ &= (1 + 2\sqrt{3}i - 3) (1 + i\sqrt{3}) \\ &= (-2 + 2\sqrt{3}i) (1 + i\sqrt{3}) \\ &= (-2) (1 - \sqrt{3}i) (1 + i\sqrt{3}) \\ &= (-2) (1 - i^2 \cdot 3) = (-2)(1 + 3) \\ &= -8 \quad \checkmark \\ (1 - i\sqrt{3})^3 &= (1 - i\sqrt{3})^2 (1 - i\sqrt{3}) \\ &= (-2 - 2\sqrt{3}i) (1 - i\sqrt{3}) \\ &= (-2) (1 + i\sqrt{3}) (1 - i\sqrt{3}) \\ &= (-2)(1 + 3) \\ &= -8 \quad \checkmark\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}z^2 = i &\Leftrightarrow z^2 = e^{i\frac{\pi}{2}} \\ &\Leftrightarrow z = \pm e^{i\frac{\pi}{4}} \\ &\Leftrightarrow z = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}(1 + i)\end{aligned}$$

c) $z^4 = -16$ hat 4 Lösungen:

Um die Gleichung $z^4 = -16$ zu lösen definieren wir $y := z^2$, so dass die erste Gleichung äquivalent ist zu $y^2 = -16$. Nun lösen wir als erstes die Gleichung $y^2 = -16$ nach y auf.

$$y^2 = -16 \Leftrightarrow y = \pm 4i$$

Also müssen wir noch die zwei Gleichungen $z^2 = 4i$ und $z^2 = -4i$ lösen und nutzen dafür das Ergebnis aus dem vorherigen Aufgabenteil.

$$\begin{aligned}z^2 = 4i &\Leftrightarrow \left(\frac{z}{2}\right)^2 = i \\ &\Leftrightarrow \frac{z}{2} = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}(1 + i) \\ &\Leftrightarrow z = \pm \sqrt{2}(1 + i)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
z^2 = -4i &\Leftrightarrow -\frac{z^2}{4} = i \\
&\Leftrightarrow \left(\frac{zi}{2}\right)^2 = i \\
&\Leftrightarrow \frac{zi}{2} = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}(1+i) \\
&\Leftrightarrow zi = \pm \sqrt{2}(1+i) \\
&\Leftrightarrow z = \pm \sqrt{2}i(1+i) = \pm \sqrt{2}(i-1)
\end{aligned}$$

Die vier Lösungen sind also

$$\begin{aligned}
z_1 &= \sqrt{2}(1+i) \\
z_2 &= -\sqrt{2}(1+i) \\
z_3 &= \sqrt{2}(1-i) \\
z_4 &= \sqrt{2}(i-1)
\end{aligned}$$

d) Mittels der Berechnung des multiplikativen Inversen:

$$\begin{aligned}
(2-i)^{-1} &= \frac{1}{2^2+1^2}(2+i) = \frac{1}{5}(2+i) \\
(2+1)(2-i)^{-1} &= \frac{1}{5}(2+i)(2+i) = \frac{1}{5}(4+4i-1) = \frac{3}{5} + \frac{4}{5}i
\end{aligned}$$

Alternativ:

$$\begin{aligned}
\frac{2+i}{2-i} &= \frac{(2+i)(2+i)}{(2-i)(2+i)} = \frac{4+4i-1}{4-i^2} = \frac{3+4i}{5} \\
&= \frac{3}{5} + \frac{4}{5}i.
\end{aligned}$$

Aufgabe 28: Skizzieren Sie die Lösungen der Gleichung

$$z^k = 1 \quad \text{für} \quad k = 2, 4, 8$$

in \mathbb{C} . Wie sehen alle Lösungen der Gleichung

$$z^k = 1, \quad k \in \mathbb{N}$$

in \mathbb{C} aus?

LÖSUNG: Lösungen der Gleichung $z^2 = 1$ in \mathbb{C} :

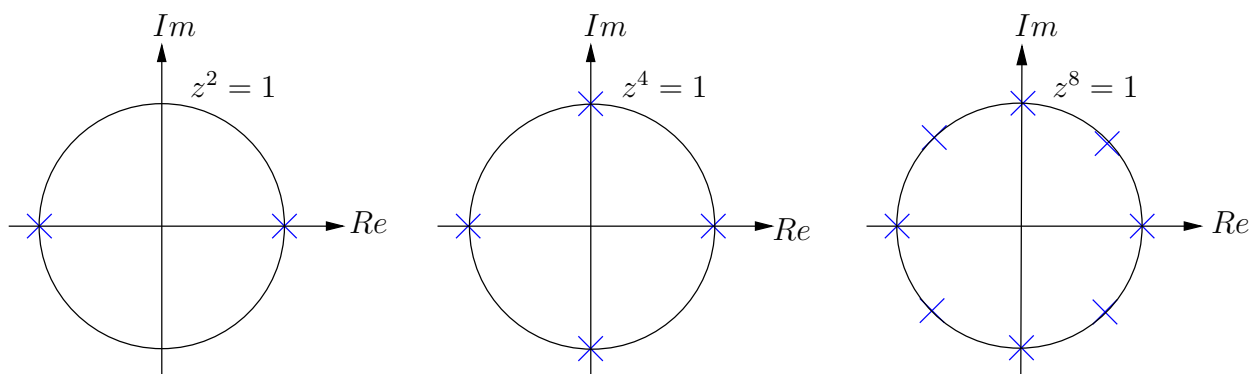
$$\begin{aligned}
z^2 = 1 &\Leftrightarrow z^2 = e^{i0} \Rightarrow z = e^{i0} = 1 \\
z^2 = 1 &\Leftrightarrow z^2 = e^{i2\pi} \Rightarrow z = e^{i\pi} = -1
\end{aligned}$$

Lösungen der Gleichung $z^4 = 1$ in \mathbb{C} :

$$\begin{aligned}
z^4 = 1 &\Leftrightarrow z^4 = e^{i0} \Rightarrow z = e^{i0} = 1 \\
z^4 = 1 &\Leftrightarrow z^4 = e^{i2\pi} \Rightarrow z = e^{i\frac{\pi}{2}} = i \\
z^4 = 1 &\Leftrightarrow z^4 = e^{i4\pi} \Rightarrow z = e^{i\pi} = -1 \\
z^4 = 1 &\Leftrightarrow z^4 = e^{i6\pi} \Rightarrow z = e^{i\frac{3}{2}\pi} = -i
\end{aligned}$$

Lösungen der Gleichung $z^8 = 1$ in \mathbb{C} :

$$\begin{aligned}
 z^8 = 1 &\Leftrightarrow z^8 = e^{i0} &\Rightarrow z = e^{i0} = 1 \\
 z^8 = 1 &\Leftrightarrow z^8 = e^{i2\pi} &\Rightarrow z = e^{i\frac{1}{4}\pi} = \frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}} \\
 z^8 = 1 &\Leftrightarrow z^8 = e^{i4\pi} &\Rightarrow z = e^{i\frac{1}{2}\pi} = i \\
 z^8 = 1 &\Leftrightarrow z^8 = e^{i6\pi} &\Rightarrow z = e^{i\frac{3}{4}\pi} = -\frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}} \\
 z^8 = 1 &\Leftrightarrow z^8 = e^{i8\pi} &\Rightarrow z = e^{i\pi} = -1 \\
 z^8 = 1 &\Leftrightarrow z^8 = e^{i10\pi} &\Rightarrow z = e^{i\frac{5}{4}\pi} = -\frac{1}{\sqrt{2}} - i\frac{1}{\sqrt{2}} \\
 z^8 = 1 &\Leftrightarrow z^8 = e^{i12\pi} &\Rightarrow z = e^{i\frac{3}{2}\pi} = -i \\
 z^8 = 1 &\Leftrightarrow z^8 = e^{i14\pi} &\Rightarrow z = e^{i\frac{7}{4}\pi} = \frac{1}{\sqrt{2}} - i\frac{1}{\sqrt{2}}
 \end{aligned}$$



Eine Lösung der allgemeinen Gleichung

$$z^k = 1, \quad k \in \mathbb{N}$$

ist immer $z = 1$. Die restlichen $k - 1$ Lösungen liegen gleichmäßig verteilt auf dem Einheitskreis:

$$z = e^{2\pi i \frac{l}{k}} \text{ für } l = 0, 1, \dots, k - 1.$$

Die Lösungen von $z^{2k} = 1$ sind die k Lösungen der Gleichung $z^k = 1$ und k weitere Lösungen.