Aufgabe 29: Berechnen Sie die Eigenwerte und die Eigenvektoren von

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} -3/4 & 1/2 \\ 1/2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Finden Sie einen Zusammenhang zwischen den Eigenwerten und Eigenvektoren von $\mathbf{A}$ und $\mathbf{A}^{-1}$.

LÖSUNG: (I) Bestimmung der Eigenwerte von $\mathbf{A}$:

$$\begin{aligned} \det(\mathbf{A} - \lambda \mathbb{1}) &= \det \begin{pmatrix} -\lambda & 2 \\ 2 & 3-\lambda \end{pmatrix} \\ &= -\lambda(3-\lambda) - 4 \\ &= \lambda^2 - 3\lambda - 4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lambda^2 - 3\lambda - 4 &= 0 \\ \Leftrightarrow \left(\lambda - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{9}{4} - 4 &= 0 \\ \Leftrightarrow \qquad \lambda &= \frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{25}{4}} \\ &= \frac{3}{2} \pm \frac{5}{2} \end{aligned}$$

Also sind $\lambda_1 = -1$ und $\lambda_2 = 4$ die Eigenwerte von $\mathbf{A}$.
(II) **Bestimmung der zugehörigen Eigenvektoren:**
a) Für $\lambda_1 = -1$ gilt:

$$\mathbf{A} - \lambda_1 \mathbf{I} = \mathbf{A} + \mathbf{I} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow x + 2y = 0 \quad \text{mit} \quad y = 1 \Rightarrow x = -2y = -2\,.$$

Also ist $\operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$ die Menge aller Eigenvektoren zu $\lambda_1 = -1$ von $\mathbf{A}$.

$$\text{Probe: } \mathbf{A} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = (-1) \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

b) Für $\lambda_2 = 4$ gilt:

$$\mathbf{A} - \lambda_2 \mathbf{I} = \mathbf{A} - 4\mathbf{I} = \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow -4x + 2y = 0 \Leftrightarrow -2x + y = 0 \quad \text{mit} \quad x = 1 \Rightarrow y = 2\,.$$

Also ist span $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$ die Menge aller Eigenvektoren zu $\lambda_2 = 4$ von $\mathbf{A}$.

$$\text{Probe:} \quad \mathbf{A} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \end{pmatrix} = 4 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}\,.$$

(III) Es sei

$$\mathbf{B} := \mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{4} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}.$$

Die charakteristische Gleichung von $\mathbf{B}$ lautet: $\lambda^2 + \frac{3}{4}\lambda - \frac{1}{4} = 0$ (siehe (I)!).

$$\Leftrightarrow (\lambda + 1)(\lambda - \frac{1}{4}) = 0 \Rightarrow \lambda_1 = -1,\ \lambda_2 = \frac{1}{4}\,.$$

Offensichtlich gilt: $\lambda_1^B = \frac{1}{\lambda_1^A}$ und $\lambda_2^B = \frac{1}{\lambda_2^A}$ ($-1 = -1$ und $\frac{1}{4} = \frac{1}{4}$).
Fazit: Die Eigenwerte von $\mathbf{A}^{-1}$ sind die Kehrwerte der Eigenwerte von $\mathbf{A}$!
Bestimmung der zugehörigen Eigenvektoren:
a) Für $\lambda_1 = -1$ gilt:

$$\mathbf{B} + \mathbf{I} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}\,.$$

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}x + y = 0 \quad \text{mit} \quad y = 1 \Rightarrow x = -2.$$

Also ist span $\left\{ \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ auch die Menge aller Eigenvektoren zu $\lambda_1 = -1$ von $\mathbf{B} = \mathbf{A}^{-1}$.
b) Für $\lambda_2 = \frac{1}{4}$ gilt:

$$\mathbf{B} - \frac{1}{4}\mathbf{I} = \begin{pmatrix} -1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \end{pmatrix}\,.$$

$$\begin{pmatrix} -1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow -x + \frac{1}{2}y = 0 \quad \text{mit} \quad x = 1 \Rightarrow y = 2\,.$$

Also ist span $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$ auch die Menge aller Eigenvektoren zu $\lambda_2 = \frac{1}{4}$ von $\mathbf{B} = \mathbf{A}^{-1}$.
Fazit: Die Eigenwerte von $\mathbf{A}^{-1}$ sind die Kehrwerte der Eigenwerte von $\mathbf{A}$ und die zugehörigen Eigenvektoren sind gleich. D.h. wenn λ_1 ein Eigenwert von $\mathbf{A}$ ist und $\frac{1}{\lambda_1}$ folglich ein Eigenwert von $\mathbf{A}^{-1}$, so sind die Eigenvektoren der beiden Matrizen zu diesen Eigenwerten gleich.

Aufgabe 30: Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Diagonalisieren Sie A, d.h. berechnen Sie eine orthogonal Matrix U und eine Diagonalmatrix D, so dass $A = UDU^T$. Berechnen Sie die Spur und die Determinante von A und D.

LÖSUNG: Da A eine symmetrische Matrix ist, hat die zu A gehörende Diagonalmatrix auf der Diagonalen genau die Eigenwerte von A. Diese bestimmen wir mit dem charakteristischen Polynom:

$$\begin{aligned}
\det(A - \lambda I) &= \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 3-\lambda & 1 \\ 0 & 1 & 3-\lambda \end{pmatrix} \\
&= (1-\lambda)(3-\lambda)^2 - (1-\lambda) \\
&= (1-\lambda)(9 - 6\lambda + \lambda^2 - 1) \\
&= (1-\lambda)(\lambda^2 - 6\lambda + 8) \\
&= (1-\lambda)(\lambda - 2)(\lambda - 4) = 0
\end{aligned}$$

Also ist die zu A gehörende Diagonalmatrix $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$.

Eigenvektoren der Matrix A:

Menge der Eigenvektoren zum Eigenwert 1: $\left\{ \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \middle| \alpha \in \mathbb{R} \right\}$

Der normierte Eigenvektor lautet also: $u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Menge der Eigenvektoren zum Eigenwert 2: $\left\{ \alpha \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \middle| \alpha \in \mathbb{R} \right\}$

Der normierte Eigenvektor lautet also: $u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$.

Menge der Eigenvektoren zum Eigenwert 4: $\left\{ \alpha \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \middle| \alpha \in \mathbb{R} \right\}$

Der normierte Eigenvektor lautet also: $u_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$.

Da A drei voneinander verschiedene Eigenwerte hat, sind die Eigenräume orthogonal und wir erhalten

$$U = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad U^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

Daher gilt:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = UDU^T.$$

Des Weiteren gilt für die Determinant und Spur von A und D:

$$\det \mathbf{A} = 1 \cdot 3 \cdot 3 + 0 + 0 - 0 - 1 \cdot 1 \cdot 1 - 0 = 8$$

$$\det \mathbf{D} = 1 \cdot 2 \cdot 4 = 8 = \det \mathbf{A}$$

$$\operatorname{tr} \mathbf{A} = 1 + 3 + 3 = 7$$

$$\operatorname{tr} \mathbf{D} = 1 + 2 + 4 = 7 = \operatorname{tr} \mathbf{A}$$

Aufgabe 31: Diagonalisieren Sie die Matrix

$$A = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 13 & 4 & -2 \\ 4 & 13 & -2 \\ -2 & -2 & 10 \end{pmatrix}.$$

> **Tipps:** Das charakteristische Polynom hat ganzzahlige Koeffizienten und ganzzahlige Nullstellen (d.h. die Eigenwerte von A sind ganzzahlig).
> Achten Sie darauf, dass die Eigenvektoren senkrecht aufeinander stehen müssen.

LÖSUNG: **Berechnung der Eigenwerte:**

$$\begin{aligned} P(\lambda) &= \det \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 13-9\lambda & 4 & -2 \\ 4 & 13-9\lambda & -2 \\ -2 & -2 & 10-9\lambda \end{pmatrix} \\ &= 9^{-3}((13-9\lambda)^2(10-9\lambda) + 16 + 16 - 4(13-9\lambda) - 4(13-9\lambda) - 16(10-9\lambda)) \\ &= 9^{-3}((169 - 234\lambda + 81\lambda^2)(10-9\lambda) + 32 - 104 + 72\lambda - 160 + 144\lambda) \\ &= 9^{-3}(1690 - 2340\lambda + 810\lambda^2 - 1521\lambda + 2106\lambda^2 - 729\lambda^3 - 232 + 216\lambda) \\ &= 2 - 5\lambda + 4\lambda^2 - \lambda^3 \end{aligned}$$

Aus dem Tipp wissen wir, dass die Matrix A ganzzahlige Eigenwerte hat. Folglich raten wir den ersten Eigenwert $\lambda_1 = 1$ und testen

$$P(1) = 2 - 5 + 4 - 1 = 0$$

Polynomdivision ergibt

$$(2 - 5\lambda + 4\lambda^2 - \lambda^3) : (\lambda - 1) = -\lambda^2 + 3\lambda - 2$$

$$\begin{array}{rrcl} & -\lambda^2+3\lambda-2 & = & 0 \\ \Leftrightarrow & \lambda^2-3\lambda+2 & = & 0 \\ \Leftrightarrow & \lambda & = & \frac{3}{2}\pm\sqrt{\frac{1}{4}} \\ & & = & 1 \text{ oder } 2 \end{array}$$

Die Eigenwerte der Matrix A sind also $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ und $\lambda_3 = 2$.

Bestimmung der Eigenvektoren:
Berechnung des Eigenvektors zum Eigenwert $\lambda_3 = 2$:

$$\begin{array}{rrcll} & (A-2\mathbb{1})x & = & 0 & \\ \Leftrightarrow & (9A-18\mathbb{1})x & = & 0 & \\ \Leftrightarrow & \begin{pmatrix} -5 & 4 & -2 \\ 4 & -5 & -2 \\ -2 & -2 & -8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} & = & \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} & \\ \Leftrightarrow & \begin{pmatrix} 1 & -\frac{4}{5} & \frac{2}{5} \\ 0 & -\frac{9}{5} & -\frac{18}{5} \\ 0 & -\frac{18}{5} & -\frac{36}{5} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} & = & \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} & \begin{array}{l} -\frac{1}{5}I = I' \\ \frac{4}{5}I + II = II' \\ -\frac{2}{5}I + III = III' \end{array} \\ \Leftrightarrow & \begin{pmatrix} 1 & -\frac{4}{5} & \frac{2}{5} \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} & = & \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} & \begin{array}{l} \\ -\frac{5}{9}II' \\ -2II' + III' \end{array} \\ \Rightarrow & x_2 & = & -2x_3 & \\ & x_1 & = & \frac{4}{5}x_2 - \frac{2}{5}x_3 & \\ & & = & -\frac{8}{5}x_3 - \frac{2}{5}x_3 & \\ & & = & -2x_3 & \end{array}$$

Mit $x_3 = 1$ erhalten wir also den Vektor $\begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ und normiert

$$v_3 = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

Berechnung der Eigenvektoren zum Eigenwert $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$:

$$\begin{array}{rrcl} & (A-\mathbb{1})x & = & 0 \\ \Leftrightarrow & (9A-9\mathbb{1})x & = & 0 \\ \Leftrightarrow & \begin{pmatrix} 4 & 4 & -2 \\ 4 & 4 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} & = & \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

Alle Zeilen sind äquivalent

$$\Rightarrow 2x_1 + 2x_2 - x_3 = 0$$

Der Eigenraum zum Eigenwert $\lambda_1 = \lambda_2$ ist also die Ebene durch den Ursprung, die durch diese Gleichung gegeben ist. Man kann sie auch folgendermaßen schreiben:

$$\left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 2(x_1+x_2) \end{pmatrix} \middle| x_1, x_2 \in \mathbb{R} \right\}$$

Wir suchen nun als Eigenvektoren zwei zueinander senkrechte (und normierte) Richtungsvektoren in dieser Ebene.

Wir wählen als ersten z.B. den Vektor $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}$ (man kann natürlich einen beliebigen Nicht-Null-Vektor in der Ebene wählen, dieser hat aber eine besonders rechenfreundliche Länge) und normieren ihn, so dass wir den Vektor

$$v_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

erhalten. Als zweiten Eigenvektor suchen wir einen Vektor aus demselben Eigenraum, der senkrecht auf v_1 steht, das heißt folgende zwei Gleichungen erfüllt

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 - 2x_3 &= 0 \\ 2x_1 + 2x_2 - x_3 &= 0 \end{aligned}$$

Die erste Gleichung sorgt dafür, dass der neue Vektor senkrecht auf v_1 steht und die zweite Gleichung sorgt dafür, dass der neue Vektor im selben Eigenraum liegt. Addition beider Gleichungen ergibt

$$3x_1 - 3x_3 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x_1 = x_3$$

und wenn man dies in die erste Gleichung einsetzt erhält man

$$x_1 = -2x_2.$$

Mit $x_2 = 1$ erhalten wir also den Vektor $\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ und normiert

$$v_2 = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

Da die Vektoren v_1, v_2 und v_3 senkrecht auf einander stehen ($v_1 \cdot v_3 = 0$ und $v_2 \cdot v_3 = 0$) und normiert sind, ist die Matrix

$$U = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

eine orthogonale Matrix.

$$U^T A U = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Alternativ: Wir wählen im ersten Schritt den Vektor $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ und erhalten so

$$v_1 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, v_2 = \frac{1}{3\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -4 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Damit ist

$$U = \frac{1}{3\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 3 & -4 & -2\sqrt{5} \\ 0 & 5 & -2\sqrt{5} \\ 6 & 2 & \sqrt{5} \end{pmatrix}.$$