Aufgabe 36: Berechnen Sie die Singulärwertzerlegung der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} -3 & -5 \\ 0 & 4 \\ -6 & -2 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 37: Sei $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ eine quadratische Matrix.

a) Wenn A orthogonal ist, sind alle Singulärwerte von A gleich 1.
ja ☐ nein ☐

b) Wenn A orthogonal ist, sind die Singulärwerte von A gleich den Eigenwerten von A. ja ☐ nein ☐

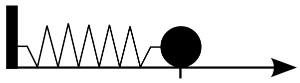
c) Wenn A orthogonal ist, sind die Singulärwerte von A gleich den Eigenwerten von $A^T A$. ja ☐ nein ☐

d) Wenn A symmetrisch ist, sind alle Singulärwerte von A gleich 1.
ja ☐ nein ☐

e) Wenn A symmetrisch ist, sind alle Singulärwerte von A gleich den Eigenwerten von A. ja ☐ nein ☐

f) Wenn A symmetrisch ist, sind alle Singulärwerte von A gleich den Beträgen derjenigen Eigenwerte von A, die ungleich Null sind.
ja ☐ nein ☐

Aufgabe 38: Betrachten Sie den in der Skizze dargestellten Fall.



Bewegen wir die Kugel der Masse m nach links oder rechts und lassen sie los, so versetzen wir das System in Schwingungen. Die Reibungskräfte vernachlässigen wir. Bei Auslenkung der Kugel nach rechts oder links übt die Feder die (Rückstell-) Kraft $F = -Dx$ auf die Kugel aus, die mittels $F = m\ddot{x}$ zu einer Beschleunigung der Kugel führt. Daraus ergibt sich die Differentialgleichung

$$\ddot{x} = -\frac{D}{m}x.$$

a) Lösen Sie die Differentialgleichung für die Anfangswerte $x(0) = 1$ und $\dot{x}(0) = 0$, indem Sie den Ansatz $x(t) = a\cos(bt + c)$ wählen und die Konstanten $a, b, c \in \mathbb{R}$ berechnen.

b) Schreiben Sie diese Differentialgleichung zweiter Ordnung um in ein System von Differentialgleichungen erster Ordnung.

c) Zeigen Sie, dass die Gesamtenergie des Systems, die sich zusammensetzt aus der kinetischen Energie $E_{\text{kin}} = \frac{1}{2}m\dot{x}^2$ der Kugel und der (in der Dehnung der Feder gespeicherten) elastischen Energie $E_{\text{elast}} = \frac{1}{2}Dx^2$ konstant ist.

Aufgabe 39:

a) Stellen Sie eine Differentialgleichung auf, die die Bewegung eines Satelliten um die Erde ohne Berücksichtigung des Mondes beschreibt. Wählen Sie das Koordinatensystem so, dass der Erdmittelpunkt im Ursprung liegt.

b) Eine geostationäre Umlaufbahn ist (näherungsweise) eine Kreisbahn in Äquatorebene. Geben Sie eine Parametrisierung für eine beliebige Kreisbahn in Äquatorebene um den Ursprung an, die Radius r hat und in der Zeit T einmal die Erde umkreist hat. Den Startpunkt können Sie z.B. als $\begin{pmatrix} r \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ wählen.

c) Zeigen Sie, dass diese Kurve für geeignete r, T die Differentialgleichung löst. Welche Bedingung ergibt sich dabei für r und T?

d) Ein geostationärer Satellit umkreist die Erde innerhalb eines siderischen Tages (23 h 56 m 4 s). Die Erdmasse beträgt $5{,}9736 \cdot 10^{24}$ kg. Berechnen Sie den Radius der geostationären Umlaufbahn.

e) Wie groß ist die Geschwindigkeit eines Satelliten in geostationärer Umlaufbahn?