Aufgabe 47: Seien $a, b \in \mathbb{C}$ beliebig, $z = 1 + i \in \mathbb{C}$.

a) Geben Sie die Formel zur Berechnung des Produktes ab zweier komplexer Zahlen $a, b \in \mathbb{C}$ in der Darstellung $x + iy$ an.

b) Geben Sie die Formel zur Berechnung des Produktes ab zweier komplexer Zahlen $a, b \in \mathbb{C}$ in der Darstellung $re^{i\varphi}$ an.

c) Geben Sie z in der Form $z = re^{i\varphi}$ (mit $r \geq 0$ und $0 \leq \varphi < 2\pi$) an.

Skizzieren Sie die Lage von z in der komplexen Ebene.

Zeichnen Sie in Ihre Skizze die Koordinaten r und φ (bzgl. der Darstellung $re^{i\varphi}$) sowie x und y (bzgl. der Darstellung $x + iy$) ein.

d) Geben Sie $-z$ in der Form $re^{i\varphi}$ (mit $r \geq 0$ und $0 \leq \varphi < 2\pi$) an.

LÖSUNG:

a) $a = x_1 + iy_1$ und $b = x_2 + iy_2$, dann

$$ab = (x_1 + iy_1) \cdot (x_2 + iy_2) = (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + x_2y_1)$$

b) $a = r_1e^{i\varphi_1}$ und $b = r_2e^{i\varphi_2}$, dann

$$ab = r_1e^{i\varphi_1} \cdot r_2e^{i\varphi_2} = r_1r_2 \cdot e^{i(\varphi_1+\varphi_2)}$$

c) $z = 1 + i$, dann $r = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$, $\varphi = \arccos(1/r) = \frac{\pi}{4}$

d) Multiplikation mit -1 ist eine Drehung um π in der komplexen Ebene, also addiere π zu $\frac{\pi}{4}$ und erhalte $-z = \sqrt{2}\, e^{i\frac{5\pi}{4}}$.

Aufgabe 48: Gegeben sei die gewöhnliche Differentialgleichung

$$M\ddot{x} + R\dot{x} + Dx = 0$$

mit $M, R, D \in \mathbb{R}^+$.

a) Schreiben Sie die Differentialgleichung zu einem System von Differentialgleichungen erster Ordnung um.

b) Geben Sie einen (konkreten) Satz von Anfangswerten vor, so dass das zugehörige Anfangswertproblem genau eine Lösung hat.

c) Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$\dot{x} = tx + \exp\left(\frac{t^2}{2}\right), \qquad x(0) = 1\,.$$

LÖSUNG:

a) $M\ddot{x} + R\dot{x} + Dx = 0 \Leftrightarrow \ddot{x} = -\frac{R}{M}\dot{x} - \frac{D}{M}x$
Sei nun $z_0 := x$ und $z_1 := \dot{x}$. Dann folgt:

$$\begin{aligned}\dot{z}_0 &= z_1\\ \dot{z}_1 &= -\frac{R}{M}\dot{x} - \frac{D}{M}x\end{aligned}$$

b) $x(0) = x_0$, $\dot{x}(0) = v_0$.

c) Ansatz: $x(t) = y(t)\,w(t)$ mit $y(t)$ Lösung zu $\dot{y} = ty$ mit $y(0) = 1$, d.h.

$$y(t) = \exp\left(\int_0^t s\,\mathrm{d}s\right) y(0) = \exp\left(\frac{t^2}{2}\right),$$

und

$$w(t) = \int_0^t \frac{\exp\frac{s^2}{2}}{\exp\frac{s^2}{2}}\mathrm{d}s + x(0) = \int_0^t \mathrm{d}s + 1 = t + 1\,.$$

Also ist $x(t) = (t+1)\exp\left(\frac{t^2}{2}\right)$.

Aufgabe 49: Berechnen Sie Länge und Richtung der Hauptachsen des durch

$$\left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, x^2 + 5y^2 + 2z^2 - 4yz = 1\right\}$$

gegebenen Ellipsoids.

LÖSUNG:

$$x^2 + 5y^2 + 2z^2 - 4yz = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} x\\ y\\ z\end{pmatrix}^T A \begin{pmatrix} x\\ y\\ z\end{pmatrix} = 1\,, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0\\ 0 & 5 & -2\\ 0 & -2 & 2\end{pmatrix}$$

Berechne Eigenwerte $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ und Eigenvektoren:

$$0 = \det(A - \lambda\mathbb{1}) = (1-\lambda)\cdot\big((5-\lambda)(2-\lambda) - 4\big) = (1-\lambda)\cdot\big(\lambda^2 - 7\lambda + 6\big) = (1-\lambda)^2(6-\lambda)$$
$$\Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 1,\ \lambda_3 = 6$$

Die Halbachsenlängen sind gegeben durch $1/\sqrt{\lambda_i}$, d.h. $a = 1$, $b = 1$ und $c = 1/\sqrt{6}$.

Normierte Eigenvektoren zu $\lambda_{1,2} = 1$ bzw. die Achsen der Länge a und b:

$$\ker(A - 1\mathbb{1}) = \ker\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0\\ 0 & 4 & -2\\ 0 & -2 & 1\end{pmatrix} = \ker\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0\\ 0 & 2 & -1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix} = \left\langle \begin{pmatrix} 1\\ 0\\ 0\end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 0\\ 1\\ 2\end{pmatrix}\right\rangle$$

Normierter Eigenvektor zu $\lambda_3 = 6$ bzw. die Achse der Länge c::

$$\ker(A - 6\mathbb{1}) = \ker\begin{pmatrix} -5 & 0 & 0\\ 0 & -1 & -2\\ 0 & -2 & -4\end{pmatrix} = \ker\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix} = \left\langle \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 0\\ -2\\ 1\end{pmatrix}\right\rangle$$