Algorithmische Mathematik II

Sommersemester 2016
Prof. Dr. Sven Beuchler
Dr. Markus Siebenmorgen

universitätbonn

Aufgabenblatt 10.

Abgabedatum: **22.06.2016**.

Aufgabe 1. (Trigonometrische-Interpolation)
Gegeben seien die Stützstellen

i	0	1	2	3	4
x_i	0	$\pi/2$	π	$3\pi/2$	2π
y_i	1	3	2	-1	1

a) Berechnen Sie das trigonometrische Polynom

$$p(x) = \beta_0 + \beta_1 e^{ix} + \beta_2 e^{2ix} + \beta_3 e^{3ix},$$

welches die oben angegebenen Stützstellen interpoliert.

b) Bestimmen Sie das äquivalente trigonometrische Polynom

$$q(x) = \frac{a_0}{2} + a_1 \cos(x) + b_1 \sin(x) + \frac{a_2}{2} \cos(2x).$$

(4 Punkte)

Aufgabe 2. (Bernsteinpolynome)
Die Bernstein-Polynome vom Grad n sind definiert durch

$$B_k^n(t) = \binom{n}{k} t^k (1-t)^{n-k}.$$

Zeigen Sie die folgenden Eigenschaften der Bernstein-Polynome:

a) $\sum_{k=0}^n B_k^n(t) = 1$.

b) $B_0^n(0) = B_n^n(1) = 1,\ B_k^n(0) = B_k^n(1) = 0$, für $1 \leq k \leq n-1$.

c) B_k^n hat genau ein Maximum in $[0,1]$ und zwar bei $t = \frac{k}{n}$.

d) Für $1 \leq k \leq n$ gilt
$$B_k^n(t) = (1-t)B_k^{n-1}(t) + tB_{k-1}^{n-1}(t).$$

e) Die Bernstein-Polynome $\{B_k^n,\ k = 0, \dots, n\}$ bilden eine Basis des Polynomraumes $\mathcal{P}_n$.

(4 Punkte)

Aufgabe 3. (Orthonormalsysteme)

Zu $m \in \mathbb{N}$ seien Funktionen $g_k : [0,1] \to \mathbb{R},\ k = 1, 2, \dots, 2m+1$ gegeben durch

$$g_1(x) = 1$$

und

$$g_{2j}(x) = \sqrt{2}\cos(2\pi j x), \quad g_{2j+1}(x) = \sqrt{2}\sin(2\pi j x), \quad j = 1, 2, \dots, m.$$

Zeigen Sie, dass diese Funktionen ein *Orthonormalsystem* in $L^2(0,1)$, dem Raum der quadratintegrierbaren Funktionen über $[0,1]$, bilden. Das bedeutet, dass

$$(g_k, g_l)_{L^2(0,1)} := \int_0^1 g_k(x) g_l(x)\,\mathrm{d}x = \delta_{kl}$$

für $k, l \in \{1, 2, \dots, 2m+1\}$ gilt.

(4 Punkte)

Aufgabe 4. (Optimalitätseigenschaft der trigonometrischen Interpolation)

Für $n \in \mathbb{N}$ sei f_n ein reelles trigonometrisches Polynom vom Grad $2n+1$, also $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ sei gegeben durch

$$f_n(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{n} \Big(a_k \cos(2\pi k x) + b_k \sin(2\pi k x) \Big).$$

Zeigen Sie, dass das trigonometrische Polynom vom Grad $2m+1 < 2n+1$ mit minimalem *Abstand* von f_n im Sinne von $L^2(0,1)$ gegeben ist durch Abschneiden der obigen Summation bei $k = m$. Das heißt, zeigen Sie, dass

$$\|f_n - p_m\|^2 := \int_0^1 \big(f_n(x) - p_m(x) \big)^2\,\mathrm{d}x$$

unter allen reellen trigonometrischen Polynomen der Form

$$p_m(x) = \tilde{a}_0 + \sum_{k=1}^{m} \Big(\tilde{a}_k \cos(2\pi k x) + \tilde{b}_k \sin(2\pi k x) \Big)$$

minimiert wird durch die Wahl $\tilde{a}_0 = a_0,\ \tilde{a}_k = a_k,\ \tilde{b}_k = b_k,\ k = 1, 2, \dots, m.$

(4 Punkte)

Programmieraufgabe 1. (FFT)

Schreiben Sie ein C/C++-Programm, dass Algorithmus 5.3 aus der Vorlesung, also die schnelle Fouriertransformation (FFT), realisiert. Beachten Sie, dass Sie hierfür Rechenoperationen komplexer Zahlen benötigen. Sie können sich dafür entweder mit der Bibliothek `complex.h` vertraut machen oder jeden komplexe Vektor $x \in \mathbb{C}^n$ als Array der Länge $n \times 2$ abspeichern, wobei die Realteile der Komponenten von x in der ersten Spalte und die Imaginärteile entsprechend in der zweiten Zeile abgespeichert werden. Verwenden Sie als Input einen Vektor $x \in \mathbb{C}^n$, den Sie durch $2n$ Zufallszahlen mit Hilfe des Zufallszahlengenerators von Blatt 4 konstruieren, wobei die ersten n Zahlen die Realteile und die zweiten n Zahlen die Imaginärteile von x darstellen. Führen Sie anschließend eine Laufzeitanalyse Ihres Programms für $n = 2^k$ und $k = 10, 11, .., 20$ durch.

(10 Punkte)

Die Programmieraufgabe wird in der Woche vom 27.06-01.07 im Cip-Pool Endenicher Allee oder im Cip-Pool Wegelerstraße abgegeben/vorgestellt. In der Woche vom 20.06-24.06 werden in den Cip-Pools Listen für die Abgabe aushängen.

Auch in diesem Semester wird es wieder einen Help-Desk geben, bei dem Fragen zur Vorlesung und zu den Übungen gestellt werden können. Dieser findet Di. von 12-15 Uhr und Do. von 13-16 Uhr statt.