



Algorithmische Mathematik II

Sommersemester 2016
Prof. Dr. Sven Beuchler
Dr. Markus Siebenmorgen



Aufgabenblatt 11.

Abgabedatum: 29.06.2016.

Aufgabe 1. (Splines)

Gegeben seien die Stützpunkte und Funktionswerte

i	0	1	2	3	4
x_i	0	1	2	3	4
$s(x_i)$	3	6	-3	-6	3

a) Berechnen Sie die Koeffizienten des zugehörigen linearen Splines

$$s : [0, 4] \rightarrow \mathbb{R}, \quad s(t) = \sum_{i=1}^n \alpha_i B_{i,2}^z(t)$$

b) Berechnen Sie die Koeffizienten des zugehörigen kubischen Splines

$$s : [0, 4] \rightarrow \mathbb{R}, \quad s(t) = \sum_{i=1}^n \alpha_i B_{i,4}^z(t)$$

mit periodischen Randbedingungen.

Werten Sie die Splines an den Stellen $a_i = 0.5 + i$ für $i = 0, \dots, 3$ aus und skizzieren Sie die Splines.

(4 Punkte)

Aufgabe 2. (Verallgemeinerte Newton-Cotes Formeln)

Berechnen Sie das Integral

$$I = \int_0^1 \sqrt{x} \, dx$$

näherungsweise auf der Unterteilung

$$x_0 = 0, \quad x_1 = 1/4, \quad x_2 = 1/2, \quad x_3 = 3/4, \quad x_4 = 1$$

mit Hilfe der

a) zusammengesetzten Mittelpunktsregel,

b) zusammengesetzten Trapezregel,

c) zusammengesetzten Simpsonregel.

(4 Punkte)

Aufgabe 3. (Zusammengesetzte Trapezregel)

Es soll

$$I = \int_0^2 \ln(2x + 1) dt$$

mit der zusammengesetzten Trapezsumme T_n berechnet werden.

- a) Wieviele Teilintervalle sind hinreichend, um den Fehler $|I - T_n| \leq 2/3$ garantieren zu können?
- b) Verwenden Sie die Anzahl der Teilintervalle aus a) um eine Approximation an I mit der zusammengesetzten Trapezsumme zu bestimmen. Wie groß ist der tatsächliche Fehler?

(4 Punkte)

Aufgabe 4. (Quadratur durch Extrapolation)

$T(h)$ sei die Trapezsumme zur Maschenweite $h = \frac{b-a}{n}$ mit $n \in \mathbb{N}$, die auf die Funktion $f \in C^4([a, b])$ angewandt wird. Es gilt die Entwicklung

$$T(h) = I(f) + Ch^2 + \mathcal{O}(h^4)$$

mit $I(f) := \int_a^b f(x)dx$ und $C > 0$.

- a) Betrachten Sie diese Entwicklung für $T(h)$ und $T(h/2)$, um Konstanten $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ zu bestimmen, so dass

$$U(h) := \alpha T(h) + \beta T(h/2) = I(f) + \mathcal{O}(h^4)$$

gilt.

- b) Erläutern Sie, wie man diese neue Quadraturformel U interpretieren kann. Mit welcher Ordnung konvergiert T bzw. U ?

(4 Punkte)

Programmieraufgabe 1. (B-Splines)

Schreiben Sie ein C/C++-Programm um B-Splines mit periodischen Randbedingungen der Ordnung $k = 6$ zu visualisieren. Zerlegen Sie dazu das Intervall $I = [-3, 3]$ äquidistant in $n = 6$ Teilintervalle. Bestimmen Sie anschließend die Werte $B_{7,6}^z(t)$ an $m = 1001$ äquidistanten Auswertepunkten auf dem Intervall $[-2, 4]$, also an $t_j = -2 + (j-1)6/1000$ für $j = 1, \dots, 1001$. Plotten Sie dann $B_{7,6}^z$ auf dem Intervall $[-2, 4]$.

(10 Punkte)

Die Programmieraufgabe wird in der Woche vom 11.07-15.07 im Cip-Pool Endenicher Allee oder im Cip-Pool Wegelerstraße abgegeben/vorgelegt. In der Woche vom 04.07-08.07 werden in den Cip-Pools Listen für die Abgabe aushängen.

Auch in diesem Semester wird es wieder einen Help-Desk geben, bei dem Fragen zur Vorlesung und zu den Übungen gestellt werden können. Dieser findet Di. von 12-15 Uhr und Do. von 13-16 Uhr statt.