Algorithmische Mathematik II

Sommersemester 2016
Prof. Dr. Sven Beuchler
Dr. Markus Siebenmorgen

universitätbonn

Aufgabenblatt 12.

Abgabedatum: **06.07.2016**.

Aufgabe 1. (Finite Differenzen)

a) Sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine genügend oft stetig differenzierbare Funktion. Die erste Ableitung von f lässt sich durch die folgende finite Differenz approximieren

$$f'(x) \approx \frac{1}{12h}\left(f(x-2h) - 8f(x-h) + 8f(x+h) - f(x+2h)\right).$$

Ermitteln Sie die Fehlerordnung der finiten Differenz.

b) Sei $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ eine genügend oft stetig differenzierbare Funktion. Zeigen Sie, dass sich die gemischte Ableitung $\partial^2/(\partial_x\partial_y)f(x,y)$ durch eine finite Differenz, die nur die Funktionswerte von f an den Stellen $(x \pm h, y \pm h)$ verwendet, mit zweiter Ordnung approximieren lassen. Weisen Sie dafür die folgende Eigenschaft nach

$$\frac{\partial^2}{\partial_x\partial_y}f(x,y) = \frac{f(x+h,y+h) - f(x-h,y+h) - f(x+h,y-h) + f(x-h,y-h)}{4h^2} + \mathcal{O}(h^2).$$

(4 Punkte)

Aufgabe 2. (Diskretisierung)

Wir betrachten die Differentialgleichung

$$\begin{aligned} -a(x)u''(x) + c(x)u(x) &= f(x) \quad \text{in } (0,1), \\ u(0) = u(1) &= 0 \end{aligned}$$

mit $a(x) = \sin(2\pi x) + 2$, $c(x) = \exp(x)$ und $f(x) = 1$. Diskretisieren Sie diese Differentialgleichung in den Punkten $x_i = i/n$ für $i = 1, \dots, n-1$ und stellen Sie das resultierende Gleichungssystem auf. Verwenden Sie hierfür den aus der Vorlesung bekannten zentralen Differenzenquotienten als Approximation an $u''(x_i)$.

(4 Punkte)

Aufgabe 3. (Gerschgorin-Kreise)

Sei $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ eine Matrix.

a) Zeigen Sie, dass dann für alle Eigenwerte λ von A gilt

$$\lambda \in \bigcup_{i=1}^{n} \mathcal{R}_i, \quad \mathcal{R}_i = \left\{ z \in \mathbb{C} : |z - a_{ii}| \leq \sum_{j=1, j\neq i}^{n} |a_{ij}| \right\}.$$

Die $\mathcal{R}_i$ werden *Gerschgorin Kreise* genannt.

b) Betrachten sie nun die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 4 & -1 & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & -1 & 4 & -1 \\ 0 & \dots & 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

und grenzen Sie die Eigenwerte der Matrix ein. Beachten Sie hierbei auch die Symmetrie der Matrix.

(4 Punkte)

Aufgabe 4. (Graduierte Quadratur)

Wir wollen die Funktion $f(x) = \sqrt{x}$ auf dem Intervall $I = [0, 1]$ durch eine zusammengesetzte Trapezregel approximieren. Die Wahl der Stützstellen wählen wir hierbei auf zwei verschiedene Arten. Zum einen ein äquidistantes Gitter, d.h. $x_i = (i-1) \cdot h$ für $i = 1, \dots, n$ und $h = 1/(n-1)$ und zum anderen ein graduiertes Gitter, d.h. $x_i = \big((i-1) \cdot h\big)^4$.

a) Zeigen sie, dass für den Fehler der zusammengesetzten Trapezregel bezüglich äquidistanter Stützstellen gilt

$$\left| \int_0^1 \sqrt{x} \, \mathrm{d}x - Q_{h,2}^{\text{äqui}}(\sqrt{x}) \right| \leq \mathcal{O}\left(h^{3/2}\right).$$

b) Zeigen sie, dass für den Fehler der zusammengesetzten Trapezregel bezüglich graduierter Stützstellen gilt

$$\left| \int_0^1 \sqrt{x} \, \mathrm{d}x - Q_{h,2}^{\text{grad}}(\sqrt{x}) \right| \leq \mathcal{O}\left(h^2\right).$$

Hinweis: Verwenden Sie die Abschätung (5.37) ab dem 2. Teilinterval.

(4 Punkte)

Programmieraufgabe 1. (Graduierte Quadratur)

Schreiben Sie ein C/C++-Programm, dass die Funktion $f(x) = x^\alpha$ auf dem Intervall $I = [0,1]$ mit der zusammengesetzten Trapezregel approximiert. Verwenden Sie für die Trapezregel Stützstellen der Form $x_i = \big((i-1)\cdot h\big)^\beta$ für $i = 1,\dots,n$ und $h = 1/(n-1)$, was für $\beta = 1$ einem äquidistanten und $\beta > 1$ einem graduierten Gitter entspricht. Testen Sie die Konvergenz der Verfahren für $\alpha = 1/2, 1/3, 1/4$ und $\beta = 1, 2, 4, 6, 8$. Wählen Sie hierfür $n = 10^j$ Stützstellen für $j = 1,\dots,5$ und verwenden Sie einen doppelt logarithmischen Plot zur Visualisierung. Welche Wahl von β ist zu gegebenem α optimal?

(10 Punkte)

Die Programmieraufgabe wird in der Woche vom 11.07-15.07 im Cip-Pool Endenicher Allee oder im Cip-Pool Wegelerstraße abgegeben/vorgestellt. In der Woche vom 04.07-08.07 werden in den Cip-Pools Listen für die Abgabe aushängen.

Auch in diesem Semester wird es wieder einen Help-Desk geben, bei dem Fragen zur Vorlesung und zu den Übungen gestellt werden können. Dieser findet Di. von 12-15 Uhr und Do. von 13-16 Uhr statt.