Prof. Dr. Sven Beuchler
Dr. Markus Siebenmorgen

universitätbonn

Aufgabenblatt 13.

Abgabedatum: **13.07.2016**.

Aufgabe 1. (Konvergenz von Iterationsverfahren)

Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 2.5 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 2.5 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

a) Zeigen Sie, dass das Gauß-Seidel-Verfahren und das Jacobi-Verfahren für diese Matrix konvergieren, indem Sie die Spektralradien der zugehörigen Iterationsmatrizen bestimmen?

b) Wie viele Iterationsschritte werden jeweils benötigt, um eine weitere korrekte Dezimalstelle der Näherungslösung zu erhalten?

(4 Punkte)

Aufgabe 2. (Iterationsverfahren für diagonaldominante Matrizen)

a) Sei $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine strikt diagonaldominante Matrix, d.h. es gilt $a_{ii} > \sum_{j\neq i} |a_{ij}|$ für $i = 1, \ldots, n$. Zeigen Sie, dass in diesem Falle sowohl das Jacobi-Verfahren als auch das Gauß-Seidel-Verfahren für jeden Startvektor $x_0 \in \mathbb{R}^n$ konvergieren. Verwenden Sie hierfür die Maximumsnorm.

b) Betrachten Sie die Matrix

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 2.5 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 2.5 & -1 \\ 0 & 0.5 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

und schätzen Sie die Konvergenzrate für das Jacobi-Verfahren ab.

(4 Punkte)

Aufgabe 3. (Konstruktion von Iterationsverfahren)

Sei $A = M - N$ eine Zerlegung der symmetrischen, positiv definiten Matrix A. Zusätzlich sei auch N symmetrisch und positiv definit. Zeigen Sie, dass das Iterationsverfahren gegeben durch die Iterationsvorschrift

$$x_{k+1} = x_k + M^{-1}(b - Ax_k)$$

konvergiert.

(4 Punkte)

Aufgabe 4. (Fixpunktiterationen)

Bestimmen sie für welche der folgenden Gleichungen und für welche Startwerte die zugehörigen Fixpunktiterationen konvergieren und bestimmen Sie gegebenenfalls auch die Konvergenzrate:

a) $x = \exp(x) - \sin(x) + x$,

b) $x = \sin(x) - \exp(x) + x$,

c) $x = \log\big(\sin(x)\big)$, für $x \in (0, \pi)$.

(4 Punkte)