Algorithmische Mathematik II

Sommersemester 2016
Prof. Dr. Sven Beuchler
Dr. Markus Siebenmorgen

universitätbonn

Aufgabenblatt 14.

Abgabedatum: **Keine Abgabe**.

Aufgabe 1. (Fixpunktiteration für Matrizen)

Es sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ symmetrisch und $C \in \mathbb{R}^{n\times n}$.
Für $X \in \mathbb{R}^{n\times n}$ sei

$$F(X) := AX + X^T A - C$$

a) Es sei $||A||_2 < \frac{1}{2}$.
Zeigen Sie, dass F in $\mathbb{R}^{n\times n}$ genau einen Fixpunkt hat, d.h. es gibt genau eine Matrix $M \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mit

$$AM + M^T A - C = M,$$

und dass die Fixpunktiteration

$$(*) \qquad X_{m+1} = AX_m + X_m^T A - C$$

für jeden Startwert $X_0 \in \mathbb{R}^{n\times n}$ gegen M strebt.

b) Es sei

$$A = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

und $X_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$. Wieviele Schritte des Iterationsverfahrens $(*)$ muss man durchführen, um $||X_m - M||_2 < 10^{-5}$ garantieren zu können?

Aufgabe 2. (Fixpunktiteration)

Betrachten Sie die Funktion $f(x) = 3\pi x - \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)$.

a) Beweisen Sie mit Hilfe des Banachschen Fixpunktsatzes, dass f im Intervall $I = [0, 1]$ genau eine Nullstelle $x^* \in I$ besitzt.

b) Formulieren Sie eine Iteration, die garantiert gegen die Nullstelle konvergiert. Geben Sie den Startwert und die Iterationsvorschrift explizit an.

c) Ausgehend vom Startwert $x^{(0)}$ haben Sie nach einem Schritt der Fixpunktiteration die Approximation $x^{(1)}$ mit $|x^{(1)} - x^{(0)}| = 10^{-5}$ bestimmt. Welchen absoluten Fehler von $x^{(1)}$ können Sie garantieren?

Aufgabe 3. (Newton-Verfahren)

Gegeben sei das nichtlineare Gleichungssystem

$$F(x,y) = \begin{bmatrix} x^3 + y^3 - 4 \\ x^3 - y^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

a) Zeigen Sie, dass das Newton–Verfahren zur Lösung von $F(x, y) = 0$ für jeden Startvektor $(x^{(0)}, y^{(0)}) \in [1, 2] \times [1, 2]$ konvergiert.

b) Führen Sie ausgehend vom Startvektor $(x^{(0)}, y^{(0)}) = (1, 1)$ zwei Iterationsschritte des Newton–Verfahrens durch.

Aufgabe 4. (Inversion und Division)

Wir wollen nun das Newton-Verfahren zur Berechnung von $x = 1/a$ mit $a \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ betrachten, d.h. wir suchen die Nullstelle von $f(x) = 1/x - a$.

a) Zeigen Sie, dass die zugehörige Iterationsvorschrift die Gestalt

$$x_{k+1} = x_k + x_k(1 - ax_k) \text{ f"ur } k \geq 0$$

hat. Mit welchen arithmetischen Operationen kann man somit die Division b/a approximieren?

b) Zeigen Sie, dass für den Fehler $\varepsilon_k = x_k - 1/a$ die Rekursion $\varepsilon_{k+1} = -a\varepsilon_k^2$ gilt. Welche Vorzeichen haben $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots$?

c) Beweisen Sie durch vollständige Induktion

$$\varepsilon_k = -\frac{1}{a}\rho^{2^k} \quad \text{mit } \rho = |ax_0 - 1|.$$

Welche Bedingung für ρ bzw. x_0 ist hinreichend und notwendig für die Konvergenz des Iterationsverfahrens? Wie groß ist die Konvergenzrate?

d) Es sei $1/2 \leq a \leq 1$ und $x_0 = 3/2$. Bestimmen Sie die (maximale) Anzahl der erforderlichen Additionen und Multiplikationen zur Berechnung von $1/a$ auf 24 bzw. 56 Dualstellen.

Aufgabe 5. (Ergänzungsaufabe: CG-Verfahren)

In der Vorlesung wurden einige Beziehungen, die beim CG-Verfahren gelten, ohne Beweis angegeben. Das wollen wir jetzt nachholen. Die Aufgaben (a)–(c) dienen als Vorbereitung für die Aufgaben (d)–(f). Man beachte aber auch die unten stehenden Hinweise.

a) Man beweise $e^{(k)} = e^{(k-1)} + \alpha_{k-1} q^{(k-1)}$ f"ur $k \geq 1$.

b) Man beweise $\langle e^{(k)}, q^{(j)} \rangle_A = 0$ f"ur $k \geq 1$ und $j = 0, ..., k-1$.

c) Man beweise $\langle e^{(k)}, w^{(j)} \rangle_A = 0$ f"ur $k \geq 1$ und $j = 0, ..., k-1$. Man überlege sich, dass das äquivalent zu $\langle r^{(k)}, w^{(j)} \rangle = \langle w^{(k)}, r^{(j)} \rangle = 0$ ist.

d) Die Formeln für α_k sind in der Vorlesung beim Gradientenverfahren und im konkreten CG-Verfahren unterschiedlich angegeben:

$$\alpha_k = -\frac{\langle z^{(k)}, q^{(k)} \rangle_A}{\langle q^{(k)}, q^{(k)} \rangle_A} \quad \text{bzw.} \quad \alpha_k = -\frac{\langle r^{(k)}, w^{(k)} \rangle}{\langle A q^{(k)}, q^{(k)} \rangle}.$$

Man beweise, dass beide Ausdrücke gleich sind.

e) β_k wird so gewählt, dass $\langle q^{(k+1)}, q^{(k)} \rangle_A = 0$ wird. Das führt zunächst auf

$$\beta_k = -\frac{\langle w^{(k+1)}, q^{(k)} \rangle_A}{\langle q^{(k)}, q^{(k)} \rangle_A} \quad \text{anstatt} \quad \beta_k = \frac{\langle w^{(k+1)}, r^{(k+1)} \rangle}{\langle w^{(k)}, r^{(k)} \rangle},$$

wie es in der Vorlesung angegeben wurde. Man beweise, dass beide Ausdrücke gleich sind.

f) Man beweise $\langle q^{(k)}, q^{(j)} \rangle_A = 0$ für $k \geq 1$ und $j = 0, ..., k-1$.

Hinweise:

- Es ist $e^{(k)} := x^{(k)} - x^*$. Die Aufgabe (a) ist damit trivial.
- Die restlichen 5 Beziehungen beweise man durch vollständige Induktion. Man muss alle 5 Beziehungen gleichzeitig behandeln! Die angegebene Reihenfolge macht Sinn.
- Im Induktionsschritt kann man für (b) und (c) die Beziehung (a) recht gut gebrauchen. Bei (c) muss man die F"alle $j = 0$ und $j > 0$ getrennt behandeln.
- Bei (e) und (f) kann man die Beziehung $A q^{(j)} = \alpha_j^{-1} (r^{(j+1)} - r^{(j)})$ verwenden.

Die letzte Aufgabe ist recht aufwendig und ist als Vervollständigung für die Vorlesung für Interessierte gedacht.