Algorithmische Mathematik II

Sommersemester 2016
Prof. Dr. Sven Beuchler
Dr. Markus Siebenmorgen

universitätbonn

Aufgabenblatt 14.

Abgabedatum: **Keine Abgabe**.

Aufgabe 1. (Fixpunktiteration für Matrizen)

Es sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ symmetrisch und $C \in \mathbb{R}^{n\times n}$.
Für $X \in \mathbb{R}^{n\times n}$ sei

$$F(X) := AX + X^T A - C$$

a) Es sei $||A||_2 < \frac{1}{2}$.
Zeigen Sie, dass F in $\mathbb{R}^{n\times n}$ genau einen Fixpunkt hat, d.h. es gibt genau eine Matrix $M \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mit

$$AM + M^T A - C = M,$$

und dass die Fixpunktiteration

$$(*) \qquad X_{m+1} = AX_m + X_m^T A - C$$

für jeden Startwert $X_0 \in \mathbb{R}^{n\times n}$ gegen M strebt.

b) Es sei

$$A = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

und $X_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$. Wieviele Schritte des Iterationsverfahrens $(*)$ muss man durchführen, um $||X_m - M||_2 < 10^{-5}$ garantieren zu können?

Lösung.

a) Wir zeigen, daß $F(X) := AX + X^T A - C$ $(X \in \mathbb{R}^{n\times n})$ die Voraussetzungen des Banachschen Fixpunktsatzes erfüllt.

(i) $\mathbb{R}^{n\times n}$ versehen mit der Euklid-Norm $\|\cdot\|_2$ ist ein Banachraum (insbesondere ein vollständiger metrischer Raum).

(ii) Offensichtlich bildet F den Raum $\mathbb{R}^{n\times n}$ in sich ab.

(iii) Es gilt

$$\begin{aligned} & \|F(X) - F(Y)\|_2 = \|AX + X^T A - C - AY - Y^T A + C\|_2 \\ = \; & \|A(X-Y) + (X^T - Y^T)A\|_2 \leq \|A(X-Y)\|_2 + \|(X-Y)^T A\|_2 \\ = \; & 2\|A(X-Y)\|_2 \leq 2\|A\|_2\|X-Y\|_2 = L\|X-Y\|_2 \end{aligned}$$

mit $L := 2\|A\|_2 < 1$ für alle $X, Y \in \mathbb{R}^{n\times n}$ (neben den üblichen Ungleichungen wurde benutzt, daß A symmetrisch ist). Das bedeutet: F ist stark kontrahierend.

b) Wir verwenden die a-priori Fehlerabschätzung

$$\|X_m - M\|_2 \leq \frac{L^{m+1}}{1-L} \|X_1 - X_0\|_2 \, .$$

Hier gelten $\|A\|_2 = 1/4$, also $L = 2\|A\|_2 = 1/2$,

$$X_1 = F(X_0) = -\frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}, \text{ d. h. } \|X_1 - X_0\|_2 = \frac{5+\sqrt{17}}{4}.$$

Setzt man diese Werte in die Fehlerabschätzung ein, so muß m die Bedingung

$$\left(\frac{1}{2}\right)^m \frac{5+\sqrt{17}}{4} < 10^{-5}$$

erfüllen. Dazu ist

$$m > 17{,}8\ldots$$

erforderlich; also müssen mindestens 18 Iterationsschritte durchgeführt werden.

□

Aufgabe 2. (Fixpunktiteration)
Betrachten Sie die Funktion $f(x) = 3\pi x - \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)$.

a) Beweisen Sie mit Hilfe des Banachschen Fixpunktsatzes, dass f im Intervall $I = [0,1]$ genau eine Nullstelle $x^* \in I$ besitzt.

b) Formulieren Sie eine Iteration, die garantiert gegen die Nullstelle konvergiert. Geben Sie den Startwert und die Iterationsvorschrift explizit an.

c) Ausgehend vom Startwert $x^{(0)}$ haben Sie nach einem Schritt der Fixpunktiteration die Approximation $x^{(1)}$ mit $|x^{(1)} - x^{(0)}| = 10^{-5}$ bestimmt. Welchen absoluten Fehler von $x^{(1)}$ können Sie garantieren?

Lösung.

a) Wandle Nullstellenproblem in ein Fixpunktproblem um:

$$f(x) = 0 \;\Leftrightarrow\; g(x) := \frac{1}{3\pi} \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right) = x.$$

Für die Funktion g gelten die Voraussetzungen des Banachschen Fixpunktsatzes:

- I ist abgeschlossen.
- $\cos(x)$ ist monoton fallend auf $\left[0, \frac{\pi}{2}\right] \Rightarrow g$ ist monoton fallend auf I. Da $g(0) = \frac{1}{3\pi} \in I$ und $g(1) = 0 \in I$, gilt aufgrund der Monotonie $g(I) \subset I$; g ist also selbstabbildend.
- Für die Ableitung gilt $g'(x) = -\frac{1}{6}\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)$. Damit folgt

$$\max_{x\in I} |g'(x)| = \max_{x\in I} \left| -\frac{1}{6} \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)\right| = \frac{1}{6} \max_{x\in I} \left|\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)\right| = \frac{1}{6} =: L < 1,$$

also ist g eine Kontraktion auf I mit $L = \frac{1}{6}$.

Nach dem Banachschen Fixpunktsatz hat g einen eindeutigen Fixpunkt auf I und damit f eine eindeutige Nullstelle auf I.

b) Fixpunktiteration

$$x^{(0)} \in I \text{ beliebig, } x^{(k+1)} = g\left(x^{(k)}\right) \text{ für } k \in \mathbb{N}_0.$$

Alternativ dürfte man hier auch z.B. das Bisektionsverfahren angeben.

c) Nach der a-posteriori-Fehlerabschätzung gilt

$$\begin{aligned}\left|x^{(1)} - x^*\right| &\leq \frac{L}{1-L}\left|x^{(1)} - x^{(0)}\right| \\ &= \frac{\frac{1}{6}}{1-\frac{1}{6}}10^{-5} = \frac{1}{5}\cdot 10^{-5} = 2\cdot 10^{-6}.\end{aligned}$$

Der absolute Fehler der Näherung $x^{(1)}$ ist also kleiner oder gleich $2 \cdot 10^{-6}$.

□

Aufgabe 3. (Newton-Verfahren)

Gegeben sei das nichtlineare Gleichungssystem

$$F(x,y) = \begin{bmatrix} x^3+y^3-4 \\ x^3-y^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

a) Zeigen Sie, dass das Newton–Verfahren zur Lösung von $F(x,y) = 0$ für jeden Startvektor $(x^{(0)}, y^{(0)}) \in [1,2] \times [1,2]$ konvergiert.

b) Führen Sie ausgehend vom Startvektor $(x^{(0)}, y^{(0)}) = (1,1)$ zwei Iterationsschritte des Newton–Verfahrens durch.

Lösung.

a) $F(x,y) = \begin{bmatrix} x^3+y^3-4 \\ x^3-y^3 \end{bmatrix} \overset{!}{=} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

$F'(x,y) = \begin{bmatrix} 3x^2 & 3y^2 \\ 3x^2 & -3y^2 \end{bmatrix}$, $\Rightarrow [F'(x,y)]^{-1} = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} \frac{1}{x^2} & \frac{1}{x^2} \\ \frac{1}{y^2} & -\frac{1}{y^2} \end{bmatrix}$

$\Phi(x,y) = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} - \frac{1}{6}\begin{bmatrix} \frac{1}{x^2} & \frac{1}{x^2} \\ \frac{1}{y^2} & -\frac{1}{y^2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x^3+y^3-4 \\ x^3-y^3 \end{bmatrix} = \frac{2}{3}\begin{bmatrix} x+\frac{1}{x^2} \\ y+\frac{1}{y^2} \end{bmatrix}$

auf $[1,2]$ gilt für $f(x) = \frac{2}{3}(x + \frac{1}{x^2})$:

$f'(x) \overset{!}{=} 0 = \frac{2}{3}(1 - \frac{2}{x^3}) \Rightarrow x = \sqrt[3]{2}$

$f''(x) = \frac{4}{x^4} > 0$, für $x = \sqrt[3]{2} \Rightarrow$ lokales Minimum.

Da $f(\sqrt[3]{2}) = \sqrt[3]{2} \in [1,2]$, $f(1) = \frac{4}{3} \in [1,2]$, $f(2) = \frac{3}{2} \in [1,2]$ gilt $f(x) \in [1,2]$ für alle $x \in [1,2]$, also ist Φ eine Selbstabbildung von $Q := [1,2] \times [1,2]$, Q ist kompakt.

Es gilt $\|\Phi(x,y) - \Phi(u,v)\| \leq L\,\|(x,y) - (u,v)\|$ für $L = \max_{(x,y)\in Q}\|\Phi'(x,y)\|$ in allen Normen.

Wegen $f''(x) > 0$ in $[1,2]$ folgt f' monoton wachsend

$\Rightarrow f'(1) = -\frac{2}{3}$, $f'(2) = \frac{1}{2} \Rightarrow |f'(x)| < \frac{2}{3}$ auf $[1,2]$.

$\Rightarrow \|\Phi'(x,y)\|_\infty \leq \frac{2}{3}$ auf Q.

Alle Voraussetzungen des BFPS sind erfüllt, daher konvergiert das Newton-Verfahren für alle $(x,y) \in Q$.

b) Iteration: $x^{(0)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $x^{(1)} = \begin{bmatrix} \frac{4}{3} \\ \frac{4}{3} \end{bmatrix}$, $x^{(2)} = \begin{bmatrix} \frac{91}{72} \\ \frac{91}{72} \end{bmatrix}$.

$\square$

Aufgabe 4. (Inversion und Division)

Wir wollen nun das Newton-Verfahren zur Berechnung von $x = 1/a$ mit $a \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ betrachten, d.h. wir suchen die Nullstelle von $f(x) = 1/x - a$.

a) Zeigen Sie, dass die zugehörige Iterationsvorschrift die Gestalt

$$x_{k+1} = x_k + x_k(1 - ax_k) \quad \text{f"ur } k \geq 0$$

hat. Mit welchen arithmetischen Operationen kann man somit die Division b/a approximieren?

b) Zeigen Sie, dass für den Fehler $\varepsilon_k = x_k - 1/a$ die Rekursion $\varepsilon_{k+1} = -a\varepsilon_k^2$ gilt. Welche Vorzeichen haben $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots$?

c) Beweisen Sie durch vollständige Induktion

$$\varepsilon_k = -\frac{1}{a}\rho^{2^k} \quad \text{mit } \rho = |ax_0 - 1|.$$

Welche Bedingung für ρ bzw. x_0 ist hinreichend und notwendig für die Konvergenz des Iterationsverfahrens? Wie groß ist die Konvergenzrate?

d) Es sei $1/2 \leq a \leq 1$ und $x_0 = 3/2$. Bestimmen Sie die (maximale) Anzahl der erforderlichen Additionen und Multiplikationen zur Berechnung von $1/a$ auf 24 bzw. 56 Dualstellen.

Lösung.

a) Mit $f(x) = x^{-1} - a$, $f'(x) = -x^{-2}$ gilt

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} = x_k + \frac{x_k^{-1} - a}{x_k^{-2}} = x_k + x_k(1 - ax_k).$$

Die Division b/a lässt sich daher nur durch Additionen (Subtraktionen) und Multiplikationen approximieren ($1/a$ über obige Vorschrift und dann noch $\cdot b$).

b)

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{k+1} &= x_{k+1} - \frac{1}{a} \\
&= x_k + x_k(1 - ax_k) - \frac{1}{a} \\
&= \varepsilon_k - ax_k\left(x_k - \frac{1}{a}\right) \\
&= \varepsilon_k(1 - ax_k) = \varepsilon_k a\left(\frac{1}{a} - x_k\right) = -a\varepsilon_k^2.
\end{aligned}$$

Das Vorzeichen von ε_k ist abhängig von a: $\begin{cases} \varepsilon_k > 0 & \text{für } a < 0 \\ \varepsilon_k < 0 & \text{für } a > 0 \end{cases}$ für $k = 1, 2, \ldots$

c) (IA) $\varepsilon_0 = x_0 - \frac{1}{a} = -\frac{1}{a}(1 - ax_0)^{2^0}$.
(IV) $\varepsilon_k = -\frac{1}{a}(1 - ax_0)^{2^k}$.
(IS) $k \to k + 1$:

$$\varepsilon_{k+1} = -a\varepsilon^2 = -a\left(-\frac{1}{a}(1 - ax_0)^{2k}\right)^2 = -\frac{1}{a}(1 - ax_0)^{2^{k+1}}.$$

Es gilt also $\forall k \in \mathbb{N}_0 : \varepsilon_k = -\frac{1}{a}(1-ax_0)^{2^k}$ und somit $\forall k \in \mathbb{N}$:

$$\varepsilon_k = -\frac{1}{a}(1-ax_0)^{2^k} = -\frac{1}{a}|1-ax_0|^{2^k} = -\frac{1}{a}\rho^{2^k}.$$

Bedingung für Konvergenz: Fehler $\varepsilon_k \to 0$ für $k \to \infty$.
$\Leftrightarrow \rho^{2^k} \to 0$ für $k \to \infty \Leftrightarrow \rho < 1$, also $|ax_0 - 1| < 1 \Leftrightarrow 0 < ax_0 < 2$
$\Leftrightarrow \begin{cases} 0 < x_0 < 2/a & \text{für } a > 0, \\ -2/a < x_0 < 0 & \text{für } a < 0. \end{cases}$
Also muss x_0 in Abhängigkeit des Vorzeichens von a gewählt werden, um Konvergenz sicherzustellen. Es liegt dann quadratische Konvergenz vor, da $|\varepsilon_{k+1}| = |a||\varepsilon_k|^2$.

d) Mit $1/2 \leq a \leq 1$ und $x_0 = 3/2$ gilt

$$\begin{aligned} \max|\varepsilon_0| &= \max\left|x_0 - \frac{1}{a}\right| = \max\left|\frac{3}{2} - \frac{1}{a}\right| = \frac{1}{2} \\ \max|\varepsilon_1| &= \max|-a\varepsilon_0^2| = \frac{1}{4} \\ \Rightarrow \max|\varepsilon_k| &= \max|-a\varepsilon_k^2| = 2^{-2^k} \overset{!}{<} 2^{-24} \Rightarrow 2^k > 24 \Rightarrow k \geq 5. \end{aligned}$$

Es sind also 5 Rekursionsschritte erforderlich mit jeweils zwei Additionen und zwei Multiplikationen. $\Rightarrow$ Maximal je 10 Additionen und Multiplikationen. Analog werden 6 Rekursionsschritte für $\max|\varepsilon_k| < 2^{-56}$ benötigt und somit je 12 Additionen und Multiplikationen.

$\square$

Aufgabe 5. (Ergänzungsaufabe: CG-Verfahren)

In der Vorlesung wurden einige Beziehungen, die beim CG-Verfahren gelten, ohne Beweis angegeben. Das wollen wir jetzt nachholen. Die Aufgaben (a)–(c) dienen als Vorbereitung für die Aufgaben (d)–(f). Man beachte aber auch die unten stehenden Hinweise.

a) Man beweise $e^{(k)} = e^{(k-1)} + \alpha_{k-1} q^{(k-1)}$ f"ur $k \geq 1$.

b) Man beweise $\langle e^{(k)}, q^{(j)} \rangle_A = 0$ f"ur $k \geq 1$ und $j = 0, ..., k-1$.

c) Man beweise $\langle e^{(k)}, w^{(j)} \rangle_A = 0$ f"ur $k \geq 1$ und $j = 0, ..., k-1$. Man überlege sich, dass das äquivalent zu $\langle r^{(k)}, w^{(j)} \rangle = \langle w^{(k)}, r^{(j)} \rangle = 0$ ist.

d) Die Formeln für α_k sind in der Vorlesung beim Gradientenverfahren und im konkreten CG-Verfahren unterschiedlich angegeben:

$$\alpha_k = -\frac{\langle z^{(k)}, q^{(k)} \rangle_A}{\langle q^{(k)}, q^{(k)} \rangle_A} \quad \text{bzw.} \quad \alpha_k = -\frac{\langle r^{(k)}, w^{(k)} \rangle}{\langle A q^{(k)}, q^{(k)} \rangle}.$$

Man beweise, dass beide Ausdrücke gleich sind.

e) β_k wird so gewählt, dass $\langle q^{(k+1)}, q^{(k)} \rangle_A = 0$ wird. Das führt zunächst auf

$$\beta_k = -\frac{\langle w^{(k+1)}, q^{(k)} \rangle_A}{\langle q^{(k)}, q^{(k)} \rangle_A} \quad \text{anstatt} \quad \beta_k = \frac{\langle w^{(k+1)}, r^{(k+1)} \rangle}{\langle w^{(k)}, r^{(k)} \rangle},$$

wie es in der Vorlesung angegeben wurde. Man beweise, dass beide Ausdrücke gleich sind.

f) Man beweise $\langle q^{(k)}, q^{(j)} \rangle_A = 0$ für $k \geq 1$ und $j = 0, ..., k-1$.

Hinweise:

- Es ist $e^{(k)} := x^{(k)} - x^*$. Die Aufgabe (a) ist damit trivial.
- Die restlichen 5 Beziehungen beweise man durch vollständige Induktion. Man muss alle 5 Beziehungen gleichzeitig behandeln! Die angegebene Reihenfolge macht Sinn.
- Im Induktionsschritt kann man für (b) und (c) die Beziehung (a) recht gut gebrauchen. Bei (c) muss man die F"alle $j = 0$ und $j > 0$ getrennt behandeln.
- Bei (e) und (f) kann man die Beziehung $A q^{(j)} = \alpha_j^{-1} (r^{(j+1)} - r^{(j)})$ verwenden.

Die letzte Aufgabe ist recht aufwendig und ist als Vervollständigung für die Vorlesung für Interessierte gedacht.