Algorithmische Mathematik II

Sommersemester 2016
Prof. Dr. Sven Beuchler
Dr. Markus Siebenmorgen

universitätbonn

Aufgabenblatt 6. Abgabedatum: **23.05.2016**.

Aufgabe 1. (Duellierende Cowbos)

Drei Cowboys sind in ein Pistolengefecht verwickelt. Cowboy A trifft mit Wahrscheinlichkeit p_1, Cowboy B mit Wahrscheinlichkeit p_2 und Cowboy C mit Wahrscheinlichkeit p_3, wobei wir annehmen, dass $0 < p_3 < p_2 < p_1 < 1$. Jeder getroffene Cowboy stirbt sofort. In jeder Runde schießt jeder lebende Cowboy auf den stärksten (im Sinne der Trefferwahrscheinlichkeit) lebenden Konkurrenten, alle lebenden Cowboys schießen gleichzeitig und alle Schüsse treffen unabhängig voneinander.

a) Modellieren Sie diese Situation als Markov-Kette. Wählen Sie den Zustandsraum dabei so, dass sich zu jeder Zeit genau bestimmen lässt, welche Cowboys noch am Leben sind. Zeichnen Sie den Übergangsgraphen und geben Sie die Übergangsmatrix an.

b) Bestimmen sie die absorbierenden Zustände und deren Absorptionswahrscheinlichkeiten.

(4 Punkte)

Aufgabe 2. (KFZ-Versicherungen)

Klasse	Jahresprämie
B_1	600 Euro
B_2	500 Euro
B_3	420 Euro
B_4	360 Euro
B_5	300 Euro

Wir betrachten eine Kfz-Haftpflichtversicherung, die Versicherungsprämien nach dem folgenden *Bonus/Malus-System* bemisst. Ein Neukunde steigt ein in Stufe B_3. Verursacht er in einem Jahr keinen Unfall, so verbessert sich seine Bonusstufe auf die nächsthöhere. Verursacht er einen Unfall, so verschlechtert sie sich um eine Stufe, bei zwei oder mehr Unfällen verschlechtert sie sich sogar um zwei Stufen (man kann sich aber nicht über Stufe B_1 hinaus verschlechtern bzw. über Stufe B_5 hinaus verbessern). Hierbei nehmen wir an, dass der Versicherte im Durchschnitt pro Jahr 0.2 Unfälle verursacht.

a) Berechnen Sie den Erwartungswert der Prämienzahlung im dritten Jahr. Gehen Sie dabei so vor, dass Sie eine Markov-Kette konstruieren, die die Prämienzahlung im jeweiligen Jahr beschreibt (oder, äquivalent dazu, die entsprechende Bonusklasse). Geben Sie den Übergangsgraphen und die Übergangsmatrix der Markov-Kette an. Modellieren Sie hierbei die Anzahl der Unfälle pro Jahr als Poisson-verteilte Zufallsvariable (mit Parameter 0.2).

b) Bestimmen Sie die durchschnittliche Wartezeit bis der erste Unfall eintritt.

(4 Punkte)

Aufgabe 3. (Chapman-Kolmogoroff Gleichung)

Es sei $X = (X_0, X_1, \ldots)$ eine Markowsche Kette mit Zustandsraum $S = \{1, \ldots, n\}$. Dann gilt:

$$P(X_k = j | X_l = h) = \sum_{i=1}^{n} P(X_m = i | X_l = h) \cdot P(X_k = j | X_m = i)$$

für alle $l < m < k, 1 \leq j, h \leq n$.

(4 Punkte)

Aufgabe 4. (primitve Matrizen)

Gegeben sei eine primitive Matrix $T \in \mathbb{R}^{n \times n}$, d.h. $T \geq 0$ und es gibt ein $k \in \mathbb{N}$, so dass $T^k > 0$. Zeigen Sie

a) Jede Zeile von T enthält mindestens ein positives Element.

b) Für alle $k_0 \in \mathbb{N}$ mit $k_0 > k$ gilt $T^{k_0} > 0$.

Überprüfen Sie zudem ob die Übergangsmatrizen in Aufgabe 1 und 2 primitiv sind.

(4 Punkte)

Programmieraufgabe 1. (CRAPS)

Schreiben Sie ein C/C++-Programm, dass das in der Vorlesung vorgestellte Spiel CRAPS simuliert. Führen Sie dann 1000 Simulationen des Spiels durch und bestimmen Sie die relative Gewinnhäufigkeit. Bestimmen Sie zudem die Häufigkeitsverteilung für die Dauer des Spiels bis einer der absorbierenden Zustände erreicht wird und stellen Sie diese graphisch dar.

(10 Punkte)

Die Programmieraufgabe wird in der Woche vom 30.05-03.06 im Cip-Pool Endenicher Allee oder im Cip-Pool Wegelerstraße abgegeben/vorgestellt. In der Woche vom 23.05-27.05 werden in den Cip-Pools Listen für die Abgabe aushängen.
Für die Lehramtsstudenten zählt die Programmieraufgabe als Bonusaufgabe.

Auch in diesem Semester wird es wieder einen Help-Desk geben, bei dem Fragen zur Vorlesung und zu den Übungen gestellt werden können. Dieser findet Di. von 12-15 Uhr und Do. von 13-16 Uhr statt.