



Algorithmische Mathematik II

Sommersemester 2016
Prof. Dr. Sven Beuchler
Dr. Markus Siebenmorgen



Aufgabenblatt 7.

Abgabedatum: **01.06.2016.**

Aufgabe 1. (Vorbereitung auf die EM 2016)

Das EM Finale zwischen Deutschland und Italien muss nach Verlängerung im Elfmeterschießen entschieden werden. Nehmen Sie an, dass die einzelnen Schüsse voneinander unabhängig sind und die deutschen Schützen mit einer Wahrscheinlichkeit von 0.8 treffen, während die italienischen Schützen mit einer Wahrscheinlichkeit von 0.6 ein Tor erzielen.

- Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeiten, dass nach zehn Schüssen Deutschland gewonnen hat, Italien gewonnen hat bzw. dass das Elfmeterschießen weitergeht.
- Stellen Sie das Elfmeterschießen als eine Markov-Kette mit vier Zuständen dar.
(4 Punkte)

Aufgabe 2. (Potenzmethode)

Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine stochastische und primitive Matrix und $x^{(0)} \in \mathbb{R}^n$ mit $x^{(0)} \geq 0$ und $\|x^{(0)}\|_1 = 1$. Wir betrachten das Iterationsverfahren

$$x^{(k+1)} = Ax^{(k)}.$$

- Zeigen Sie, dass $\|x^{(k)}\|_1 = 1$ für $k = 1, 2, \dots$
- Man zeige, dass die Folge $\{x^{(k)}\}$ konvergiert und bestimme den Grenzwert $\lim_{k \rightarrow \infty} x^{(k)}$.
(4 Punkte)

Aufgabe 3. (Eigenwerte primitiver Matrizen)

- Gegeben sei eine primitive Matrix $T = [t_{ij}]_{i,j=1}^n$. Beweisen Sie Korollar 4.29, d.h. zeigen Sie, dass für den maximalen Eigenwert ρ von T gilt:

$$\min_{i=1}^n \sum_{j=1}^n t_{ij} \leq \rho \leq \max_{i=1}^n \sum_{j=1}^n t_{ij}.$$

- Bestimmen Sie nun für die Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

den maximalen Eigenwert und die obere und untere Schranke nach Aufgabenteil a).
(4 Punkte)

Aufgabe 4. (Irreduzible Matrizen)

Sei $T \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine irreduzible Matrix. Zeigen Sie, dass $I + T$ primitiv ist.

(4 Punkte)

Aufgabe 5. (Präsenzaufgabe)

Überprüfen Sie die Aussagen des Satzes von Perron-Frobenius für den Fall, dass T nur irreduzibel und nicht notwendigerweise primitiv ist.

Programmieraufgabe 1. (Elfmeterschießen)

Schreiben Sie ein C/C++-Programm, das das Elfmeterschießen aus Aufgabe 1 simuliert. Führen Sie dann 1000 Simulationen des Spiels durch und bestimmen Sie die relative Gewinnhäufigkeit der deutschen Mannschaft. Bestimmen Sie zudem die Häufigkeitsverteilung für die Dauer des Elfmeterschießens.

(10 Punkte)

Die Programmieraufgabe wird in der Woche vom 06.06-10.06 im Cip-Pool Eendenicher Allee oder im Cip-Pool Wegelerstraße abgegeben/vorgelegt. In der Woche vom 30.05-03.06 werden in den Cip-Pools Listen für die Abgabe aufgehängt. Die Programmieraufgabe ist nur von den Bachelor-Mathematik Studenten zu bearbeiten.

Auch in diesem Semester wird es wieder einen Help-Desk geben, bei dem Fragen zur Vorlesung und zu den Übungen gestellt werden können. Dieser findet Di. von 12-15 Uhr und Do. von 13-16 Uhr statt.