Algorithmische Mathematik II

Sommersemester 2016
Prof. Dr. Sven Beuchler
Dr. Markus Siebenmorgen

universität bonn

Aufgabenblatt 8.

Abgabedatum: **08.06.2016**.

Aufgabe 1. (Markow-Kette)
Wir modellieren das Wetter als eine zeitlich homogene Markow-Kette $(X_0, X_1, \ldots)$ mit dem Zustandsraum $S = \{\text{Regen, Sonne}\}$, der Übergangsmatrix

$$\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{pmatrix}$$

und wählen als Startverteilung $\boldsymbol{\mu}^{(0)} = (1, 0)$ (d.h. Start an einem regnerischen Tag).

a) Zeigen Sie, dass

$$\boldsymbol{\mu}^{(n)} = \left(\frac{1}{2}(1 + 2^{-n}), \frac{1}{2}(1 - 2^{-n}) \right) \quad \forall n \geq 1.$$

b) Charakterisieren Sie die Markow-Kette bezüglich Reduzibilität und Periodizität.

c) Existiert eine stationäre Verteilung? Falls ja, geben Sie diese an.

(4 Punkte)

Aufgabe 2. (Lemma von Bézout)
Es seien $a_1, a_2 \in \mathbb{N}$ und $b = \text{g.g.T.}(a_1, a_2)$. Zeigen Sie, dass es dann ganze Zahlen $x_1, x_2 \in \mathbb{Z}$ gibt, so dass

$$b = x_1 a_1 + x_2 a_2.$$

(4 Punkte)

Aufgabe 3. (Tschebyscheffpolynome)
Die Tschebyscheff-Polynome $T_n : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ sind gegeben durch

$$t \mapsto T_n(t) = \cos(n \arccos t).$$

Zeigen Sie, dass für das n-te Tschebyscheff-Polynom T_n gilt:

a) T_n ist Polynom maximal n-ten Grades.

b) Es gilt $T_n(1) = 1,\ T_n(-1) = (-1)^n$.

c) Es gilt $|T_n(t)| \leq 1$ für alle $t \in \mathbb{R}$ mit $|t| \leq 1$.

d) Für alle $x \in [-1, 1]$ und $k \geq 1$ gilt $T_{k+1}(t) = 2xT_k(t) - T_{k-1}(t)$.

e) Es gilt

$$T_n(t) = 2^{n-1}t^n + \sum_{k=0}^{n-2} a_k t^k$$

mit $a_k \in \mathbb{R}$.

f) Es gilt: $|T_n(t)| = 1 \Leftrightarrow t = \bar{x}_k^n = \cos\frac{k\pi}{n},\ k = 0, \ldots, n$ genauer, es gilt $T_n(\bar{x}_k^n) = (-1)^k$.

g) Es gilt: $T_n(t) = 0 \Leftrightarrow t = \cos\frac{2k-1}{2n}\pi,\ k = 1, \ldots, n.$

h) Die Tschebyscheff-Polynome sind orthogonal bezüglich des auf $\mathcal{P}_n$ definierten Skalarproduktes

$$\langle fg \rangle = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} = \int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} f(t)g(t)\,\mathrm{d}\,t,$$

d.h. es gilt

$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} T_n(t)T_m(t)\,\mathrm{d}\,t = 0, \quad n \neq m.$$

(8 Punkte)

Für die Lehramtsstudenten zählt Aufgabe 3 als Bonusaufgabe.

Programmieraufgabe 1. (stationäre Verteilung auf der Kugel)

Wir betrachten die Kugel im CSR-Format aus dem ersten Semester mit $m = (n-1)n+2$ Knoten und simulieren auf dieser Kugel einen random walk, d.h. die entstehende Markow-Kette $X_0, X_1, \ldots$ beschreibt die Position auf der Kugel zu jedem Zeitpunkt. Nehmen Sie an, dass die Übergangswahrscheinlichkeiten gleichverteilt sind unter den Nachbarknoten auf der Kugel, d.h. dass man zufällig und mit der gleichen Wahrscheinlichkeit von Knoten i zu einem Nachbarknoten von i wandert. In der Datei `kugel.cpp` ist eine Musterdatei gegeben. Hierin müssen Sie noch den `entries`-Vektor aufstellen. Schreiben Sie ein C/C++-Programm, dass die Übergangsmatrix $T \in \mathbb{R}^{m\times m}$ im CSR-Format aufstellt. Bestimmen Sie anschliessend eine zufällige Startverteilung $\mu^{(0)} \in \mathbb{R}^{1\times m}$ und ermitteln Sie die stationäre Verteilung von T mittels des Iterationsverfahrens

$$\mu^{(k+1)} = \mu^{(k)}T.$$

Verwenden Sie hierbei als Abbruchskriterium $\|\mu^{(k+1)} - \mu^{(k)}\|_1 \leq \varepsilon$ mit $\varepsilon = 10^{-6}$. Testen Sie Ihr Verfahren für $n = 10, 20, 30, 40, 50$ und geben Sie dabei jeweils die Anzahl an benötigten Iterationen aus.

(10 Punkte)

Die Programmieraufgabe wird in der Woche vom 20.06-24.06 im Cip-Pool Endenicher Allee oder im Cip-Pool Wegelerstraße abgegeben/vorgestellt. In der Woche vom 13.06-17.06 werden in den Cip-Pools Listen für die Abgabe aushängen. Die Programmieraufgabe ist nur von den Bachelor-Mathematik Studenten zu bearbeiten.

Auch in diesem Semester wird es wieder einen Help-Desk geben, bei dem Fragen zur Vorlesung und zu den Übungen gestellt werden können. Dieser findet Di. von 12-15 Uhr und Do. von 13-16 Uhr statt.