Aufgabenblatt 9.

Abgabedatum: **15.06.2016**.

Aufgabe 1. (Lagrange Polynominterpolation)

a) Gegeben seien die Stützstellen $x_1 < x_2 < \ldots < x_n$. Weisen Sie nach, dass die Lagrangepolynome eine Basis von $\mathcal{P}_{n-1}$ bilden.

b) Betrachten Sie nun die Stützstellen $x_1 = -1$, $x_2 = 0$ und $x_3 = 2$. Stellen Sie die zu den Stützstellen gehörenden Lagrangepolynome auf.

c) Bestimmen Sie die Darstellung der kanonischen Basis $\{1, x, x^2\}$ von $\mathcal{P}_2$ in der Lagrangebasis aus Aufgabenteil b).

(4 Punkte)

Aufgabe 2. (Polynominterpolation)

Betrachten Sie die Funktion

$$f(x) = \frac{2}{x+1}$$

und die Stützstellen $x_1 = 0$, $x_2 = 2$ und $x_3 = 3$.

a) Bestimmen Sie das Interpolationspolynom p in der Newtonschen Darstellung mit Hilfe des Aitken-Neville Schemas.

b) Werten Sie p über das Horner-Schema an der Stelle $x = 1$ aus.

c) Schätzen Sie den Interpolationsfehler $\max_{x\in[x_1,x_3]} |f(x) - p(x)|$ möglichst genau ab. Verwenden sie dafür die Abschätzung $\max_{x\in[x_1,x_3]} |w(x)| < 5/2$ für das Knotenpolynom $w(x) = x(x-2)(x-3)$.

(4 Punkte)

Aufgabe 3. (Kondition der Polynominterpolation)

Betrachten Sie die Polynominterpolation nach Lagrange an den Stützstellen $x_1, \ldots, x_n$ und den Werten $y_1, \ldots, y_n$.

a) Bestimmen Sie die Konditionszahlen $\frac{\partial P}{\partial x_i}$ und $\frac{\partial P}{\partial y_i}$ für die Polynominterpolation. Um welchen Betrag ändert sich $P(x)$, wenn y_i sich um ε ändert?

b) Betrachten Sie den Fehler der Polynom–Interpolation einer Funktion f mit $|f^{(n+1)}(x)| \leq c$ auf dem Intervall $[-1, 1]$ für $n + 1$ äquidistante Stützstellen $x_i = -1 + \frac{2i}{n}$. Vergleichen Sie den Fehler $P(x) - f(x)$ in den Intervallen $[0, \frac{2}{n}]$ und $[1 - \frac{2}{n}, 1]$ für wachsendes n.

Bemerkung: Diese Diskussion liefert einen Hinweis, dass der Interpolationsfehler am Rand des Intervalls wesentlich größer werden kann als im Inneren. Durch eine kluge Wahl der Stützstellen x_i kann jedoch der Interpolationsfehler über das gesamte Intervall minimiert werden. Diese Eigenschaft haben gerade die Nullstellen der Tschebyscheff-Polynome.

(4 Punkte)

Aufgabe 4. (zirkulante Matrizen)

Eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ heißt zirkulante Matrix, falls Sie die Gestalt hat

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & a_n & a_{n-1} & \dots & a_2 \\ a_2 & a_1 & a_n & \dots & a_3 \\ a_3 & a_2 & a_1 & \dots & a_4 \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \dots & a_1 \end{pmatrix}$$

mit Zahlen $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass für $f_k = [w^0, w^k, w^{2k}, \dots, w^{(n-1)k}]^T$ und $\omega = e^{2\pi i/n}$, gilt

$$Af_k = \lambda_k f_k, \qquad k = 1, 2, \dots, n.$$

(4 Punkte)

Programmieraufgabe 1. (Polynominterpolation)

Betrachten Sie die Funktion

$$f(x) = \frac{1}{1+25t^2}$$

auf dem Intervall $[-1, 1]$. Schreiben Sie ein C/C++-Programm, dass die Koeffizienten des Newtonschen Interpolationspolynom p bestimmt. Wählen Sie hierfür die n Stützstellen

a) äquidistant verteilt auf $[-1, 1]$,

b) als Nullstellen des Tschebyscheffpolynomes T_n.

Testen Sie Ihr Programm für $n = 5, 10, 20, 50$ und plotten Sie jeweils die Differenz $|f(t) - p(t)|$.

(10 Punkte)

Die Programmieraufgabe wird in der Woche vom 27.06-01.07 im Cip-Pool Endenicher Allee oder im Cip-Pool Wegelerstraße abgegeben/vorgestellt. In der Woche vom 20.06-24.06 werden in den Cip-Pools Listen für die Abgabe aushängen.

Auch in diesem Semester wird es wieder einen Help-Desk geben, bei dem Fragen zur Vorlesung und zu den Übungen gestellt werden können. Dieser findet Di. von 12-15 Uhr und Do. von 13-16 Uhr statt.