1.) Ereignisse:

$B_i, i=1,2,3$ ... Erzeugnis hat höchste / mittlere / niedrigste Qualitätsstufe

A ... Erzeugnis hat Lebensdauer von ~~maximal~~ mehr als 5000 Stunden

Geg.: $p(B_1) = \frac{17}{20}$, $p(B_2) = \frac{1}{10}$, $p(B_3) = \frac{1}{20}$

$p(A|B_1) = \frac{4}{5}$, $p(A|B_2) = \frac{1}{2}$, $p(A|B_3) = \frac{1}{5}$.

Ges.: b) $p(A)$

c) $p(\overline{B}_1|\overline{A})$

Lösung:) a) Es seien $A, B \in \mathcal{A}$ mit $P(B)>0$. Dann heißt

$P(A|B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)}$ bedingte WM von A unter der Bedingung B.

b) Satz von der totalen WM:

$$p(A) = p(A|B_1)\,p(B_1) + p(A|B_2)\cdot p(B_2) + p(A|B_3)\cdot p(B_3)$$

$$= \frac{4}{5}\cdot\frac{17}{20} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{10} + \frac{1}{20}\cdot\frac{1}{5} = \frac{68+5+1}{100} = \frac{74}{100}$$

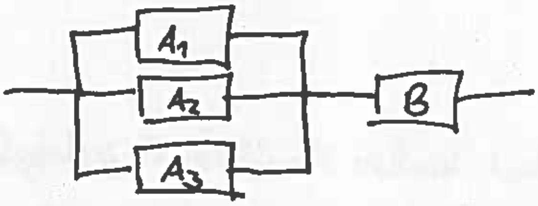
c) $$p(\overline{B}_1|\overline{A}) = 1 - p(B_1|\overline{A}) \overset{\text{Satz von Bayes}}{=} 1 - \frac{p(\overline{A}|B_1)\cdot p(B_1)}{p(\overline{A})}$$

$$= 1 - \frac{(1-p(A|B_1))\,p(B_1)}{1-p(A)} = 1 - \frac{\frac{1}{5}\cdot\frac{17}{20}}{\frac{26}{100}} = 1 - \frac{\frac{17}{100}}{\frac{26}{100}} = 1 - \frac{17}{26}$$

$$= \frac{9}{26}$$

8 Punkte
15 min

2) a)



Geg.: $p(A_i) = 1/5$, $i = 1,2,3$ | Ges.: $p(C)$ mit $C = B \cup (A_1 \cap A_2 \cap A_3)$

$p(B) = \frac{1}{10}$ C… Strom fließt von s nach t nicht

Lösung: Es sei $A = A_1 \cap A_2 \cap A_3$

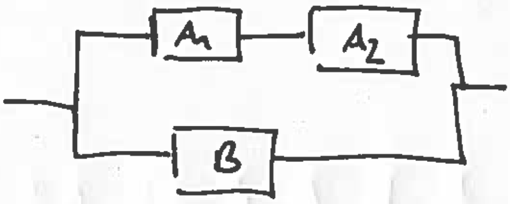
$$p(A) = p(A_1) \cdot p(A_2) \cdot p(A_3) = \frac{1}{125}$$

$$p(C) = 1 - p(\bar{C}) = 1 - p(\bar{A}) \cdot p(\bar{B}) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$$

$$= p(A) + p(B) - p(A) \cdot p(B) = \frac{1}{125} + \frac{1}{10} - \frac{1}{1250}$$

$$= \underline{\underline{\frac{134}{1250}}}$$

b)



Geg.: $P(A_1) = 0.2$

$P(A_2) = 0.1$

$P(B) = 0.25$

Ges.: C… Stromfließt von s nach t, d.h. $C = B \cap (A_1 \cup A_2)$, nicht

Lösung: Es sei $A = A_1 \cup A_2$

$$\Rightarrow p(A) = p(A_1 \cup A_2) \Rightarrow 1 - p(A) = p(\bar{A}) = p(\bar{A}_1)\, p(\bar{A}_2)$$

$$\Rightarrow p(A) = p(A_1) + p(A_2) - p(A_1) \cdot p(A_2) = 0.28$$

$$\Rightarrow p(C) = p(A \cap B) = p(A) \cdot p(B) = 0.25 \cdot 0.28 = \underline{\underline{0.07}}$$

c)

5+5 Punkte

6+6 Minuten

3.) a) Da $\sum_{i=0}^{2} p(i) = 1 \Rightarrow \sum_{i=0}^{2} c(i+1) = 1 \Rightarrow 6c = 1 \Rightarrow c = \frac{1}{6}$ |

b) $P(X<2) = \sum_{i=0}^{1} p(i) = \frac{1}{6} + \frac{2}{6} = \frac{1}{2}$ |

$P(X \leq 2) = \sum_{i=0}^{2} p(i) = 1$ |

$P(0 < X < 2) = \sum_{i=1}^{1} p(i) = \frac{1}{3}$ |

c) $EX = \sum_{i=0}^{2} i\, p(i) = 0 \cdot \frac{1}{6} + 1 \cdot \frac{1}{3} + 2 \cdot \frac{1}{2} = 4/3$ |

$EX^2 = 0 \cdot \frac{1}{6} + 1 \cdot \frac{1}{3} + 4 \cdot \frac{1}{2} = \frac{7}{3}$

$D^2X = EX^2 - (EX)^2 = \frac{7}{3} - \frac{16}{9} = \frac{5}{9} \Rightarrow \sigma = \sqrt{D^2X} = \frac{1}{3}\sqrt{5}$ |

d) Es gilt:

$P(X \leq a) = 0 \qquad a < 0$

$P(X \leq a) = \frac{1}{6} \qquad 0 \leq a < 1$

$P(X \leq a) = \frac{1}{2} \qquad 1 \leq a < 2$ |

$P(X \leq a) = 1 \qquad a \geq 2$

8 Punkte

$\Rightarrow$ $a=2$ ist der kleinste Wert, für den $P(X \leq a) > 1/2$ gilt. | 12 min

4.) Da $X \in \{0,1,2\}$ kann damit $X \sim B(2,p)$ sein: |

In diesem Fall ist $P(X=0) = p^2$

$P(X=1) = 2p(1-p)$

$P(X=2) = (1-p)^2$ |

Da $P(X=0) = 0.36 \Rightarrow p = 0.6$ |

$P(X=2) = (1-p)^2 = 0.4^2 = 0.16 = 0.64 \cdot (1-\vartheta) \Rightarrow \vartheta = 3/4$ |

Da für alle $\vartheta \in [0,1]$ gilt: $\sum_{i=0}^{2} P(X=i) = 1 \Rightarrow$ Auch die Beziehung für $P(X=1)$ stimmt. $\Rightarrow$ $X \sim B(2, 3/5)$. |

5 Punkte

10 min

5.) Es sei X_t die Anzahl der Reifenpannen auf der Länge t

Dann ist $X_t \sim Pois(\mu t)$, da Stationarität/Homogenität/Ordinarität erfüllt. $\Rightarrow$ c) | 1

Ggg.: $EX_t = 1$ für $t = 5000$ km | 1

Ges.: a) $P(X_{3500} > 0)$

b) $P(X_{15000} = 0)$ (alle 3 Pkw ohne Panne $\hat{=}$ 15000 km ohne Panne) | 1

Lösung: a) Es ist $EX_t = \mu t \Rightarrow \mu = \frac{1}{5000}$ km. | 1 Mit $\mu t = \frac{3500}{5000} = 0.7$ gilt

$P(X_{3500} = k) = \frac{(\mu t)^k}{k!} e^{-\mu t} \Rightarrow P(X_{3500} = 0) = e^{-\mu t} = e^{-0.7}$

$\Rightarrow P(X_{3500} > 0) = \underline{\underline{1 - e^{-0.7}}}$ | 1

b) $P(X_{15000} = 0) = e^{-1}$. Mit $\mu t = \frac{15000}{5000} = 3$ gilt

$P(X_{15000} = 0) = \underline{\underline{e^{-3}}}$ | 1 6 Punkte

c) siehe oben 10 min

6.) Es sei X die Anzahl der Computerausfälle

Dann ist Ggg.: $X \sim B(25, 0.1)$ | 1

Ges.: a) EX | 1

b) $P(X \geq 5)$

Lös.: a) Nach VL ist $EX = np$! Mit $n = 25$ und $p = \frac{1}{10}$ folgt

$EX = 2.5$ | 1

b) $P(X \geq 5) = 1 - P(X \leq 4) = 1 - P(X=0) - P(X=1) - P(X=2) - P(X=3) - P(X=4)$

$= 1 - \sum_{k=0}^{4} \binom{25}{k} \left(\frac{9}{10}\right)^{25-k} \left(\frac{1}{10}\right)^k$ ||

$= 1 - \frac{1}{10^{25}} \cdot 9^{21} \left[9^4 + 9^3 \cdot \binom{25}{1} + 9^2 \binom{25}{2} + 9^3 \binom{25}{3} + 9^4 \binom{25}{4} \right]$

$\ldots = 1 - \frac{82436 \cdot 9^{21}}{10^{25}} \approx 0.098$ / 6 Punkte

10 min

7.) a) Eine reelle Zufallsgröße X ist eine Abbildung $X: \Omega \to \mathbb{R}$ mit $\{\omega \in \Omega : X(\omega) \in I\} \in \mathcal{A}$ gilt für alle Intervalle $I \subset \mathbb{R}$.

b) Es sei X die Anzahl der Ausschußteile.

Geg.: Dann ist $X \sim H(12, 60, 5)$

Ges.: $P(X \geq 1)$

Lös.: Es gilt: $P(X \geq 1) = 1 - P(X=0) = 1 - \dfrac{\binom{5}{0}\binom{55}{12}}{\binom{60}{12}}$

$$= 1 - \frac{\frac{55!}{12!\,43!}}{\frac{60!}{12!\,48!}} = 1 - \frac{44 \cdot 45 \cdot 46 \cdot 47 \cdot 48}{56 \cdot 57 \cdot 58 \cdot 59 \cdot 60} = \ldots \approx 0.6865$$

c) X ist hypergeometrisch verteilt, das heißt $X \sim H(12, 60, 5)$

7 Punkte 12 min

8.) Es gilt für eine diskrete ZG mit $p(x_i) = p_i \quad i = 1, \ldots$

$$P(X \geq c) = \sum_{\{i,\, x_i \geq c\}} p(x_i) = \frac{1}{c} \sum_{x_i \geq c} c \cdot p(x_i)$$

$$\leq \frac{1}{c} \sum_{x_i \geq c} x_i\, p(x_i) \underset{x_i \geq 0}{\leq} \frac{1}{c} \sum_{i=1}^{\infty} x_i\, p(x_i) = \frac{1}{c} EX \qquad \square$$

Die Voraussetzung $X \geq 0$ ist erforderlich, denn

Sei X ZG mit $p(-3) = 1/2$, $p(1) = 1/2 \Rightarrow EX = -1$

$\Rightarrow P(X \geq c) \leq \frac{1}{c} \cdot -1 \quad \Rightarrow \lightning$

5 Punkte
10 min

9.) Es gilt für $X \sim B(n, p)$

$\sigma^2 = n \cdot p(1-p)$

Sei $f: [0,1] \to \mathbb{R}$ gegeben durch $p \mapsto f(p) = np(1-p) = n\left(-(p - 1/2)^2 + 1/4\right)$

Dann ist (f Parabel) für $p = 1/2$ maximal

3 Punkte