Wiederholungsaufgaben
Algorithmische Mathematik 1

Wintersemester 2015

Prof. Dr. Beuchler
Dr. Markus Siebenmorgen

universitätbonn

Übungsaufgaben

Aufgabe 1. (Totale Wahrscheinlichkeit)

Die Herstellung eines Erzeugnisses sei zufälligen Einflüssen unterworfen, so daß sich die Gesamtheit dieser Erzeugnisse in drei Qualitätsstufen unterteilt. Die einzelnen Qualitätsstufen unterscheiden sich dadurch, dass die Wahrscheinlichkeit für eine Lebensdauer des Erzeugnisses von mehr als 5 000 Stunden gleich
0.8 für die höchste,
0.5 für die mittlere und
0.2 für die niedrigste Qualitätsstufe
beträgt. Die Anteile der einzelnen Qualitätsstufen an der Gesamtproduktion verhalten sich in dieser Reihenfolge wie 17 : 2 : 1.

1. Es sei $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum. Man definiere den Begriff der bedingten Wahrscheinlichkeit.

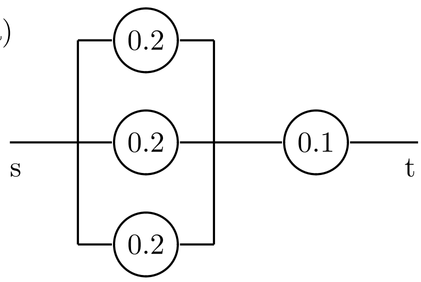
2. Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist die Lebensdauer eines zufällig herausgegriffenen Erzeugnisses größer als 5 000 Stunden?

3. Ein zufällig herausgegriffenes Erzeugnis habe weniger als 5 000 Stunden funktioniert. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, daß dieses Erzeugnis nicht die höchste Qualitätsstufe besaß?

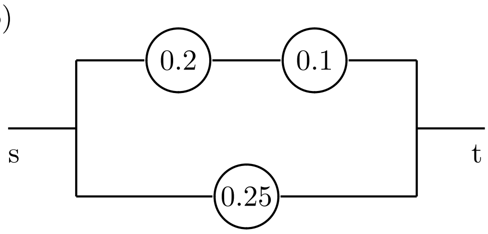
Aufgabe 2. (Unabhängigkeit)

Die nachfolgenden Schaltungen (a) – (b) beschreiben Fertigungssysteme, die bei der Herstellung eines bestimmten Erzeugnisses von links nach rechts zu durchlaufen sind. Dabei führe der Ausfall eines Teilsystems zur Unterbrechung des Erzeugnisstromes an der entsprechenden Stelle.
Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass der Erzeugnisstrom innerhalb einer bestimmten Zeit t vollständig zum Erliegen kommt, falls die Teilsysteme unabhängig voneinander in der betrachteten Zeit t mit den angegebenen Wahrscheinlichkeiten ausfallen können.

(a)



(b)



Aufgabe 3. (Diskrete Zufallsgröße)

Es sei X eine diskrete Zufallsgröße mit dem Wertebereich $\mathcal{X} = \{0, 1, 2\}$ und der Wahrscheinlichkeitsfunktion $p(x) = (x+1) \cdot c \quad$ für $\quad x \in \mathcal{X}$.

1. Bestimmen Sie den Wert der Konstanten c.

2. Ermitteln Sie die folgenden Wahrscheinlichkeiten:

$$P(X < 2)\,,\; P(X \leq 2) \quad \text{und} \quad P(0 < X < 2)\,.$$

3. Berechnen Sie Erwartungswert und Varianz von X.

4. Bestimmen Sie den kleinsten Wert von x, für den $P(X \leq x) > 0.5$ gilt?

Aufgabe 4. (Diskrete Zufallsgröße II)

Eine diskrete Zufallsgröße X nimmt nur die Werte 0, 1 oder 2 an. Die Wahrscheinlichkeitsfunktion $p(x) = P(X = x)$ von X hängt von einem Parameter $\theta \in [0, 1]$ ab:

$$\begin{aligned} P(X = 0) &= 0.36, \\ P(X = 1) &= 0.64 \cdot \theta, \\ P(X = 2) &= 0.64 \cdot (1 - \theta). \end{aligned}$$

Für welchen Wert von θ ist X binomialverteilt?

Aufgabe 5. (Diskrete Verteilungen I)

Auf einer bestimmten Rallye-Strecke von 5000 km Länge sei pro Pkw im Mittel mit einer Reifenpanne zu rechnen.

1. Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein Pkw bereits auf den ersten 3500 km eine Reifenpanne hat.

2. Eine Mannschaft sei mit drei Pkw an der Rallye beteiligt. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass alle Pkw ohne Reifenpanne die Rallye überstehen.

3. Erläutern Sie das Erfülltsein der Voraussetzungen für die Anwendung des von Ihnen gewählten Lösungsweges.

Aufgabe 6. (Diskrete Verteilungen II)

Ein Computerpool bestehe aus 25 unabhängig voneinander benutzten Einzelcomputern, die in der Regel alle 6 Monate gewartet werden. Für diesen Zeitraum betrage die Ausfallwahrscheinlichkeit eines Computers 0.1.

1. Wie groß ist die durchschnittliche Anzahl der Computerausfälle innerhalb einer Nutzungszeit von 6 Monaten?

2. Für den Fall, daß bereits vor dem nächsten Servicetermin 5 oder mehr Geräte ausfallen, wird ein vorgezogener Service vereinbart. Wie groß ist dafür die Wahrscheinlichkeit? (Der exakte Wert muß nicht berechnet werden, ein Angabe der Formel genügt)

Aufgabe 7. (Diskrete Verteilungen III)

1. Es sei $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum. Wie ist eine reelle Zufallsgröße über $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ definiert?

2. Ein Gütekontrolleur entnehme einem Los von 60 Teilen, von denen 5 Ausschuß seien, nacheinander ohne Zurücklegen 12 Teile.
   Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, daß sich unter diesen 12 Teilen mindestens ein Ausschußteil befindet ?

3. Es sei X die Anzahl der Ausschußteile. Welcher Verteilung gehorcht X?

Aufgabe 8. (Markowsche Ungleichung)

Beweisen Sie die Markov-Ungleichung

$$P(X \geq c) \leq \frac{EX}{c}$$

für jede positive Zahl c, falls X nur nichtnegative Werte annimmt. Ist diese Voraussetzung an X erforderlich?

Aufgabe 9. (Varianz)

Für welchen Wert von p hat eine binomialverteilte Zufallsgröße $X \sim B(n, p)$ bei festem n maximale Varianz?

Aufgabe 10. (Stationäre Verteilung)

Gegeben sei die folgende nichtnegative Matrix A:

$$A = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 & 0.0 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1.0 & 0.0 & 0.0 \end{bmatrix}$$

1. Wann heißt eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ stochastisch?
2. Ist A eine stochastische Matrix? Ist A irreduzibel und aperiodisch?
3. Bestimmen Sie alle stationären Verteilungen der zugehörigen Markowkette!
4. Berechnen Sie, falls existent, $\lim_{k \to \infty} A^k$.
5. Besitzt die zugehörigen Markowkette absorbierende Zustände?

Aufgabe 11. (Markowketten)

Gegeben sei die folgende nichtnegative Matrix T:

$$T = \begin{bmatrix} 0.4 & 0.2 & 0.3 & 0.1 \\ 0.2 & 0.5 & 0.3 & 0 \\ 0 & 0.3 & 0.1 & 0.6 \\ 0.4 & 0.2 & 0 & 0.4 \end{bmatrix}$$

1. Man zeichne den Übergangsgraphen der zugehörigen Markowkette.
2. Ist die Matrix T primitiv?
3. Man bestimme alle betragsgrößten Eigenwerte von T und gebe ihre algebraische und geometrische Vielfachheit an.

Aufgabe 12. (Random Walk)

Gegeben sei ein Kreis C der Länge n. Auf diesem betrachten wir einen Random-walk, der sich in jedem Zeitschritt mit Wahrscheinlichkeit p im Uhrzeigersinn und mit $1-p$ entgegen dem Uhrzeigersinn bewegt.

1. Für welche $n \in \mathbb{N}$ und $p \in (0, 1)$ ist die zugehörige Markowkette irreduzibel bzw. primitiv?
2. Man bestimme alle stationären Verteilungen der Markowkette.

Aufgabe 13.

1. Man gebe eine stochastische Matrix T an, die 1 als mehrfachen Eigenwert besitzt.
2. Man bestimme eine irreduzible stochastische Matrix T, die -1 als Eigenwert besitzt.
3. Man bestimme alle stochastischen Matrizen, die einen Eigenwert λ mit $|\lambda| > 1$ besitzen.