Wiederholungsaufgaben
Algorithmische Mathematik 2

Sommersemester 2016
Prof. Dr. Beuchler
Dr. Markus Siebenmorgen

universitätbonn

Übungsaufgaben

Aufgabe 1. (Jacobi-Verfahren)

Gegeben sei das lineare Gleichungssystem $\mathbf{Ax} - \mathbf{b} = \mathbf{0}$ für

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix}$$

1. Berechnen Sie für den Startwert $\mathbf{x}^{(0)} = \mathbf{0}$ die ersten beiden Iterationswerte $\mathbf{x}^{(1)}$ und $\mathbf{x}^{(2)}$ des Jacobi–Verfahrens.
2. Geben Sie für das Jacobi-Verfahren eine scharfe a-priori Abschätzung für den Fehler
$$\| \mathbf{x}^{(10)} - \mathbf{x}^* \|_p$$
für $p = 2$ und $p = \infty$ an. ($\mathbf{x}^*$ bezeichne die exakte Lösung).
3. Wie viele Schritte müssen mindestens mit dem Jacobi-Verfahren ausgeführt werden, so dass
$$\| \mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{x}^* \|_2 < 0.1?$$
4. Wie muss τ im Richardson-Verfahren gewählt werden,
   - um Konvergenz zu erhalten?
   - um optimale Konvergenz zu erhalten?

Aufgabe 2. (Iterative Verfahren)

Gegeben sei das Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 89.3 & -33.7 & 17.1 \\ -7.0 & 18.6 & 26.2 \\ 27.9 & 103.5 & -6.4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3.14 \\ -0.17 \\ 2.1 \end{pmatrix}.$$

1. Überprüfen Sie, daß sowohl die Zeilen- als auch die Spaltensummennorm der Iterationsmatrix größer als 1 ist und somit beide keine Konvergenz für das Jacobiverfahren anzeigen!
2. Kann man das Gleichungssystem so umformen, daß das Jacobiverfahren sicher konvergiert?

Aufgabe 3. (Polynom-Interpolation I)

Bestimmen Sie das Interpolationspolynom höchstens 2. (3.) Grades, das an den Stellen $x = -1, 0, 2\ (,1)$ die Werte von $f(x) = 2^x$ annimmt, mit Hilfe der Lagrangeschen und der Newtonschen Formel!
Berechnen Sie damit näherungsweise $\sqrt{2}$.
Schätzen Sie den Fehler für diese Näherung und für das gesamte Interpolationsintervall ab!

Aufgabe 4. (Polynom-Interpolation II)

Gegeben seien Stützstellen $x_1 < x_2 < \ldots < x_n$. Definieren Sie die

- Newton'sche Interpolationspolynome
- Lagrange Interpolationspolynome

zu diesen Stützstellen. Gegeben sei eine unendlich oft differenzierbare Funktion $f : [-1,1] \mapsto \mathbb{R}$. $p \in \mathcal{P}_{n-1}$ sei das Interpolationspolynom mit

$$p(x_i) = f(x_i), \quad i = 1\ldots,n.$$

Wie müssen die Stützstellen $-1 \leq x_1 < x_2 < \ldots < x_n \leq 1$ gewählt werden, so dass

$$\max_{t\in[-1,1]} |f(t) - p(t)|$$

minimal wird?

Aufgabe 5. (Spline-Interpolation)

Gegeben seien Stützstellen $x_1 < x_2 < \ldots < x_n$.

- Was ist ein Spline der Ordnung k zu diesen Stützstellen?
- Lösen Sie graphisch folgendes Interpolationsproblem mit linearer Spline-Interpolation

	$i=1$	$i=2$	$i=3$	$i=4$
x_i	0	1	2	3
y_i	0	2	3	7.

Aufgabe 6. (Trigonometrische Interpolation)

1. Man gebe die Fouriermatrix F_n der Dimension n an.
2. Man löse das LGS $F_4\mathbf{x} = \mathbf{b}$ für $\mathbf{b} = [1\ 2\ 5\ \ -2]^\top$.
3. Mit welchem maximalen asymptotischen Aufwand kann eine Multiplikation $F_n\mathbf{x}$ mit $n = 2^k$ durchgeführt werden?

Aufgabe 7. (Numerische Integration)

- Berechnen Sie das Integral $\int\limits_0^1 (1+t^3)\ \mathrm{d}t$ approximativ mit der Trapezregel, der Simpsonregel und der 3/8-Regel.
- Man gebe eine dazu jeweils Fehlerabschätzung an!
- Berechnen Sie das Integral $\int\limits_0^1 (1+t^3)\ \mathrm{d}t$ numerisch nun mit einer verallgemeinerten Trapezregel mit der Unterteilung in 2 Intervalle $[0,0.5]$ und $[0.5,1]$ und schätzen Sie erneut den Fehler ab.
- Gewinnen Sie aus den Werten für die Trapezregel mit 1 und 2 Intervallen die Romberg-Beschleunigung.
- Benutzen Sie eine Fehlerabschätzungen zur Ermittlung einer Mindestzahl der Teilintervalle der verallgemeinerten Trapezregel, die man benötigt, um $\int_0^1 (1+t^3)\ dt$ oder $\int_{-\pi}^{\pi} \sin(t)\cos(t)\ dt$ mit der Genauigkeit 10^{-5} zu berechnen.

Aufgabe 8. (Finite Differenzen)

Gesucht sei die approximative Lösung u der Randwertaufgabe

$$\begin{aligned} -u''(x) + 10u'(x) &= f(x), \quad x \in (0,1), \\ u(0) = 1 \qquad & u(1) = -1. \end{aligned}$$

mit $f : [0,1] \mapsto \mathbb{R}$ stetig.

1. Man bestimme einen Differenzenquotienten $\Delta_3^{2,h} g$ für g'' mit

   $$\Delta_3^{2,h} g(x) - g''(x) = \mathcal{O}(h^3),$$

   d.h. mit Fehlerordnung 3.

2. Diskretisieren Sie diese Aufgabe mittels Finiter Differenzen auf den äquidistanten Unterteilung von $(0,1)$ mit Schrittweite h. Verwenden Sie dabei Differenzenquotienten mit Fehlerordnung 2 für alle auftretenden Ableitungen.

3. Stellen Sie das entsprechende lineare Gleichungsystem auf.

Aufgabe 9. (Fixpunktverfahren)

Gegeben sei die Gleichung $x^3 = 5x - 1$. Durch grafische Darstellung und/oder Bisektion hat man festgestellt, daß die 3 Nullstellen etwa bei -2.35, 0.20 und 2.10 liegen. Der genaue Wert soll nun durch Fixpunktiteration $x_{k+1} := \varphi(x_k)$ ermittelt werden.

1. Geben Sie verschiedene Fixpunktiterationen an.

2. Welche Konvergenzeigenschaften sind von den zu den Fixpunktgleichungen gehörigen Iterationsverfahren $x_{n+1} = \varphi(x_n)$ in der Umgebung der drei Nullstellen zu erwarten?

3. Mit $x_0 = 2.10$ sind 2 Iterationsschritte einer konvergenten Fixpunktiteration durchzurechnen. und gebe eine Fehlerabschätzung für $|x_7 - x^*|$ an.

Aufgabe 10. (Fixpunktgleichungen)

Bei gegebenem $a \in \mathbb{R}$ $(a > 0)$ ist $x^* = \sqrt{a}$ Lösung der Fixpunktgleichungen

$$x = \varphi(x) = \frac{a}{x} \tag{1}$$

$$x = \varphi(x) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{a}{x}\right) \tag{2}$$

Man zeige:

1. Das durch (1) festgelegte Iterationsverfahren ist für jeden Startwert $x_0 > 0$ $(x_0 \neq \sqrt{a})$ divergent.

2. Die (2) zugeordnete Iteration konvergiert für alle $x_0 > 0$ gegen $\sqrt{a}$, wobei $\sqrt{a} \leq \ldots \leq x_n \leq x_{n-1} \leq \ldots \leq x_0$.

3. Man zeige, daß das Verfahren (2) mit der Ordnung 2 konvergiert!

Aufgabe 11. (Newton-Verfahren)

Gesucht ist die Lösung des nichtlinearen Gleichungssystems

$$\begin{aligned} f(x,y) &= x^2 + y^2 + 0.6y - 0.16 &= 0 \\ g(x,y) &= x^2 - y^2 + x - 1.6y - 0.14 &= 0 \end{aligned}$$

1. Schreiben Sie den Ansatz für das Newton-Verfahren auf!

2. Man berechne für den Startwert $[0,0]^\top$ eine Iteration des Newton-Verfahrens?

Aufgabe 12. (Newton-Verfahren)

Eine Funktion $F : D \subset \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ heißt konvex, falls für alle $x, y \in D$ und $\lambda \in [0,1]$ gilt:

$$F(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y).$$

Es sei nun $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ differenzierbar, streng monoton wachsend und konvex. Weiters habe f eine Nullstelle x^* und für gegebene $z^{(0)} < x^* < x^{(0)}$ sei $x^{(k)}$ die Folge der Newton-Iterierten und

$$z^{(k+1)} = z^{(k)} - \frac{f(z^{(k)})}{f'(x^{(k)})}.$$

Man zeige, dass die Folge $\{z^{(k)}\}_k$ monoton wachsend gegen x^* konvergiert.