Wiederholungsaufgaben
Algorithmische Mathematik 2

Sommersemester 2016
Prof. Dr. Beuchler
Dr. Markus Siebenmorgen

universitätbonn

Übungsaufgaben

Aufgabe 1. (Jacobi-Verfahren)

Gegeben sei das lineare Gleichungssystem $\mathbf{Ax} - \mathbf{b} = \mathbf{0}$ für

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix}$$

1. Berechnen Sie für den Startwert $\mathbf{x}^{(0)} = \mathbf{0}$ die ersten beiden Iterationswerte $\mathbf{x}^{(1)}$ und $\mathbf{x}^{(2)}$ des Jacobi–Verfahrens.
2. Geben Sie für das Jacobi-Verfahren eine scharfe a-priori Abschätzung für den Fehler
$$\| \mathbf{x}^{(10)} - \mathbf{x}^* \|_p$$
für $p = 2$ und $p = \infty$ an. ($\mathbf{x}^*$ bezeichne die exakte Lösung).
3. Wie viele Schritte müssen mindestens mit dem Jacobi-Verfahren ausgeführt werden, so dass
$$\| \mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{x}^* \|_2 < 0.1?$$
4. Wie muss τ im Richardson-Verfahren gewählt werden,
   - um Konvergenz zu erhalten?
   - um optimale Konvergenz zu erhalten?

Lösung.

1. Iterationsmatrix lautet $M = -D^{-1}(E+F) = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}$

   Iterationsvorschrift: $x^{(k+1)} = Mx^{(k)} + D^{-1}b = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix} x^{(k)} + \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{3}{2} \\ 2 \\ \frac{5}{2} \end{bmatrix}$

   $x^{(0)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \; x^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{3}{2} \\ 2 \\ \frac{5}{2} \end{bmatrix}, \; x^{(2)} = \begin{bmatrix} \frac{7}{4} \\ 3 \\ 4 \\ \frac{7}{2} \end{bmatrix}$

2. A besitzt die Eigenwerte (VL/Übung) $\lambda_i = 4\sin^2 \frac{\pi i}{10}$, also hat $M = I - \frac{1}{2}A$ die Eigenwerte $\mu_i = 1 - 2\sin^2 \frac{\pi i}{10} = \cos \frac{\pi i}{5}$, $i = 1, 2, 3, 4$. Also ist $\| M \|_2 = \cos \frac{\pi}{5} = q < 1$. Damit folgt nach der VL
$$\| x^{(10)} - x^* \|_2 \leq \frac{q^{(10)}}{1-q} \| x^{(1)} - x^{(0)} \|_2 = \frac{q^{10}}{1-q} \frac{3}{2}\sqrt{6}.$$

Mit

$$\| x \|_\infty \leq \| x \|_2$$

folgt die Abschätzung auch der Maximumsnorm.

3. Analog zu eben, gilt die Abschätzung

$$\| x^{(k)} - x^* \|_2 \leq \frac{q^k}{1-q} \frac{3}{2} \sqrt{6} < 0.1$$

nach k liefert

$$k \geq \frac{\log \frac{1-q}{15\sqrt{6}}}{\log q} > 24.8,$$

also 25 Iterationen.

4. Um Konvergenz zu erhalten, muss nach VL $0 < \tau < \frac{2}{\lambda_4} = \frac{1}{2\sin^2 \frac{\pi}{10}}$ sein, für die optimale Konvergenz ist

$$\tau = \frac{2}{\lambda_4 + \lambda_1} = \frac{2}{4\sin^2 \frac{\pi}{10} + 4\sin^2 \frac{4\pi}{10}} = \frac{2}{4\sin^2 \frac{\pi}{10} + 4\cos^2 \frac{\pi}{10}} = \frac{1}{2}.$$

□

Aufgabe 2. (Iterative Verfahren)

Gegeben sei das Gleichungssystem

$$\begin{bmatrix} 89.3 & -33.7 & 17.1 \\ -7.0 & 18.6 & 26.2 \\ 27.9 & 103.5 & -6.4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3.14 \\ -0.17 \\ 2.1 \end{bmatrix}.$$

1. Überprüfen Sie, daß sowohl die Zeilen- als auch die Spaltensummennorm der Iterationsmatrix größer als 1 ist und somit beide keine Konvergenz für das Jacobiverfahren anzeigen!

2. Kann man das Gleichungssystem so umformen, daß das Jacobiverfahren sicher konvergiert?

Lösung.

1. Wir berechnen mit $D = \operatorname{diag}(A)$ die Iterationsmatrix

$$M = I - D^{-1}A = \begin{bmatrix} 0 & \frac{-337}{893} & \frac{171}{893} \\ \frac{-70}{186} & 0 & \frac{262}{186} \\ \frac{279}{64} & \frac{1035}{64} & 0 \end{bmatrix}.$$

Da der Eintrag $(2,3)$ der Matrix M die Beziehung $m_{23} = \frac{262}{186} > 1$ erfüllt ist, gilt

$$\|M\|_1 = \max_{j=1}^{3} \sum_{i=1}^{3} |m_{ij}| \geq \sum_{i=1}^{3} |m_{i3}| \geq m_{23} > 1.$$

Analog gilt

$$\|M\|_\infty = \max_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{3} |m_{ij}| \geq \sum_{j=1}^{3} |m_{2j}| \geq m_{23} > 1.$$

2. Tausche 2. und 3. Zeile. Dann ist die neue Iterationsmatrix

$$M = I - D^{-1}A = \begin{bmatrix} 0 & \frac{-337}{893} & \frac{171}{893} \\ \frac{279}{1035} & 0 & \frac{-64}{1035} \\ \frac{-70}{262} & \frac{186}{262} & 0 \end{bmatrix}.$$

Dann erhalten wir z.B.

$$\|M\|_\infty = \max_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{3} |m_{ij}| = \max \left\{ \frac{508}{893}, \frac{343}{1035}, \frac{256}{262} \right\} = \frac{256}{262} < 1.$$

□

Aufgabe 3. (Polynom-Interpolation I)

Bestimmen Sie das Interpolationspolynom höchstens 2. (3.) Grades, das an den Stellen $x = -1, 0, 2\ (,1)$ die Werte von $f(x) = 2^x$ annimmt, mit Hilfe der Lagrangeschen und der Newtonschen Formel!
Berechnen Sie damit näherungsweise $\sqrt{2}$.
Schätzen Sie den Fehler für diese Näherung und für das gesamte Interpolationsintervall ab!

Lösung.

1. Lagrangedarstellung: Nach Vorlesung ist

$$p_2(t) = \frac{1}{6}t(t-2) - \frac{1}{2}(t+1)(t-2) + \frac{2}{3}t(t+1)$$

bzw.

$$p_3(t) = -\frac{1}{12}t(t-2)(t-1) + \frac{1}{2}(t+1)(t-2)(t-1) + \frac{2}{3}t(t+1)(t-1) - t(t-2)(t+1).$$

Newton: Wir nutzen dividierte Differenzen, d.h.

x_i	y_i	$k=1$	$k=2$	$k=3$
-1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{12}$
0	1	$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$	
2	4	2		
1	2			

Also ist

$$p_2(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(t+1) + \frac{1}{3}t(t+1)$$

bzw.

$$p_3(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(t+1) + \frac{1}{3}t(t+1) + \frac{1}{12}t(t+1)(t-2)$$

2. Damit

$$p_2(0.5) = \frac{3}{2}; \quad p_3(0.5) = \frac{45}{32}.$$

3. Wir nuzten die Fehlerabschätzung aus der VL

$$|p(\omega) - f(\omega)| \leq \frac{1}{n!} \max_{t\in[-1,2]} |f^{(n)}(t)| \left| \prod_{i=1}^{n} (\omega - x_i) \right|$$

für $\omega = \frac{1}{2}$ und $n = 3$ und $n = 4$ mit $x_1 = -1$, $x_2 = 0$, $x_3 = 2$ und $x_4 = 2$. Da

$$(2^x)^{(k)} = (\ln 2)^k 2^x,$$

gilt

$$\max_{t\in[-1,2]} |f^{(n)}(t)| \leq 2^2 (\ln 2)^n.$$

Nun ist

$$\prod_{i=1}^{3} (\frac{1}{2} - x_i) = -\frac{9}{8}, \quad \prod_{i=1}^{4} (\frac{1}{2} - x_i) = \frac{9}{16}.$$

Damit gilt für den Fehler

$$|p_2(\frac{1}{2}) - f(\frac{1}{2})| \leq \frac{3}{4}(\ln 2)^3, \quad |p_3(\frac{1}{2}) - f(\frac{1}{2})| \leq \frac{3}{32}(\ln 2)^4.$$

□

Aufgabe 4. (Polynom-Interpolation II)

Gegeben seien Stützstellen $x_1 < x_2 < \ldots < x_n$. Definieren Sie die

- Newton'sche Interpolationspolynome
- Lagrange Interpolationspolynome

zu diesen Stützstellen. Gegeben sei eine unendlich oft differenzierbare Funktion $f : [-1,1] \mapsto \mathbb{R}$. $p \in \mathcal{P}_{n-1}$ sei das Interpolationspolynom mit

$$p(x_i) = f(x_i), \quad i = 1\ldots,n.$$

Wie müssen die Stützstellen $-1 \leq x_1 < x_2 < \ldots < x_n \leq 1$ gewählt werden, so dass

$$\max_{t\in[-1,1]} |f(t) - p(t)|$$

minimal wird?

Lösung.

1. Lagrange:
$$l_i^x(t) = \prod_{j=1,j\neq i}^{n} \frac{t - x_j}{x_i - x_j}, \quad i = 1,\ldots,n.$$
und Newton
$$N_i^x(t) = \prod_{j=1}^{i-1}(t - x_j), \quad i = 1,\ldots,n.$$

2. Nach der VL sind dies die Nullstellen des Tschebyscheffpolynoms $T_n(t) = \cos(n \arccos t)$, also
$$x_i = \cos\frac{(2i-1)\pi}{2n}, \quad i = 1,\ldots,n.$$

□

Aufgabe 5. (Spline-Interpolation)

Gegeben seien Stützstellen $x_1 < x_2 < \ldots < x_n$.

- Was ist ein Spline der Ordnung k zu diesen Stützstellen?
- Lösen Sie graphisch folgendes Interpolationsproblem mit linearer Spline-Interpolation

	$i=1$	$i=2$	$i=3$	$i=4$
x_i	0	1	2	3
y_i	0	2	3	7.

Lösung.

1. Ein Spline S der Ordnung k ist eine Funktion $S : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ mit $x \mapsto S(x)$ und $S \in C^{k-2}[x_1, x_n]$ sowie $S\,|_{[x_i,x_{i+1}]} \in \mathcal{P}_{k-1}$, $i = 1,\ldots,n-1$.

2. Verbinde die Punkte durch einen Polygonzug.

□

Aufgabe 6. (Trigoniometrische Interpolation)

1. Man gebe die Fouriermatrix F_n der Dimension n an.

2. Man löse das LGS $F_4\mathbf{x} = \mathbf{b}$ für $\mathbf{b} = [1\ 2\ 5\ -2]^\top$.

3. Mit welchem maximalen asymptotischen Aufwand kann eine Multiplikation $F_n\mathbf{x}$ mit $n = 2^k$ durchgeführt werden?

Lösung.

1. Nach der VL ist $F_n = [f_{kj}]_{k,j=1}^n$ mit $f_{kj} = q^{(k-1)(j-1)}$ und der k-ten Einheitswurzel
$$q = \cos\frac{2\pi}{n} + \mathbf{i}\sin\frac{2\pi}{n}.$$

2. Nach der VL ist $F_n^* F_n = nI_n$. Damit folgt $\mathbf{x} = \frac{1}{2}F_4^*\mathbf{b}$, also $\mathbf{b} = [3, -2-2\mathbf{i}, 3, -2+2\mathbf{i}]^\top$.

3. $\mathcal{O}(n\log_2 n)$

□

Aufgabe 7. (Numerische Integration)

- Berechnen Sie das Integral $\int\limits_0^1 (1+t^3)\ \mathrm{d}t$ approximativ mit der Trapezregel, der Simpsonregel und der 3/8-Regel.
- Man gebe eine dazu jeweils Fehlerabschätzung an!
- Berechnen Sie das Integral $\int\limits_0^1 (1+t^3)\ \mathrm{d}t$ numerisch nun mit einer verallgemeinerten Trapezregel mit der Unterteilung in 2 Intervalle $[0, 0.5]$ und $[0.5, 1]$ und schätzen Sie erneut den Fehler ab.
- Gewinnen Sie aus den Werten für die Trapezregel mit 1 und 2 Intervallen die Romberg-Beschleunigung.
- Benutzen Sie eine Fehlerabschätzungen zur Ermittlung einer Mindestzahl der Teilintervalle der verallgemeinerten Trapezregel, die man benötigt, um $\int_0^1 (1+t^3)\ \mathrm{d}t$ oder $\int_{-\pi}^{\pi} \sin(t)\cos(t)\ \mathrm{d}t$ mit der Genauigkeit 10^{-5} zu berechnen.

Lösung.

1. Trapezregel mit $a = 0$ und $b = 1$ und $f(t) = 1 + t^3$:
$$Q_2(f) = \frac{1}{2(b-a)}(f(0) + f(1)) = \frac{1}{2}(1+2) = 1.5$$
Simpson
$$Q_3(f) = \frac{1}{6(b-a)}(f(0) + 4f(0.5) + f(1)) = \frac{1}{6}\left(1 + 4\frac{9}{8} + 2\right) = 1.25$$
3/8-Regel
$$Q_4(f) = \frac{1}{8(b-a)}(f(0) + 3f(1/3) + 3f(2/3) + f(1)) = \frac{1}{8}\left(1 + 3\frac{28}{27} + 3\frac{35}{27} + 2\right) = 1.25$$

2. Nach VL ist für $n = 2, 3, 4$ und $f(t) = 1 + t^3$
$$\left|Q_n(f) - \int_0^1 f(t)\ \mathrm{d}t\right| = \frac{1}{n!}\max_{t\in[0,1]}|f^{(n)}(t)| \int_0^1 \left|\prod_{i=1}^n (t - x_i)\right|\ \mathrm{d}t,$$
wobei x_i die jeweiligen obigen Stützstellen sind. Nun ist
$$\max_{t\in[0,1]}|f^{(2)}(t)| = \max_{t\in[0,1]} 6t = 6, \quad \max_{t\in[0,1]}|f^{(3)}(t)| = 6, \quad f^{(4)}(t) = 0$$

und

$$\int_0^1 \left|\prod_{i=1}^{2}(t-x_i)\right| \,\mathrm{d}t = \int_0^1 t(1-t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{6}$$

sowie

$$\int_0^1 \left|\prod_{i=1}^{3}(t-x_i)\right| \,\mathrm{d}t = 2\int_0^{1/2} t(0.5-t)(1-t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{32}.$$

Damit folgt für den Fehler bei der Trapezregel $\frac{1}{2}$, Simpson: $\frac{1}{32}$ (tat. 0), 3/8-Regel 0.

3. Wir nutzen die Formel mit $h = \frac{1}{2}$

$$Q_{2,h}(f) = \frac{h}{2(b-a)}\left(f(0) + 2f(0.5) + f(1)\right) = \frac{1}{4}(1 + 2\frac{9}{8} + 2) = \frac{21}{16}.$$

Nach der Vorlesung ist

$$\left|Q_{2,h}(f) - \int_0^1 (1+t^3)\,\mathrm{d}t\right| \le \max_{t\in[0,1]} |f''(t)|\frac{h^2}{12} \le 6\frac{1}{48} = \frac{1}{8}.$$

4. Wir nutzen

$$Q_{2,0.5}(f) + \frac{1}{3}(Q_{2,0.5}(f) - Q_2(f)) = \frac{21}{16} + \frac{1}{3}\left(\frac{21}{16} - \frac{3}{2}\right) = \frac{20}{16} = 1.25$$

5. Mit der VL ist

$$\left|Q_{2,h}(f) - \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t\right| \le \max_{t\in[0,1]} |f''(t)|\frac{h^2}{12} < 10^{-5}$$

d.h.

$$h < \sqrt{2\;10^{-5}},$$

also $n > \sqrt{5000}$, also mindestens 71 Intervalle. Im Falle von $g(t) = \sin t \cos t = \frac{1}{2}\sin 2t$ ist $b-a = 2\pi$ und $g''(t) = -2\sin 2t$ und damit $n > \frac{2\pi}{3}\sqrt{5000} \approx 148.1$.

□

Aufgabe 8. (Finite Differenzen)

Gesucht sei die approximative Lösung u der Randwertaufgabe

$$\begin{aligned} -u''(x) + 10u'(x) &= f(x), \quad x \in (0,1), \\ u(0) = 1 \qquad & u(1) = -1. \end{aligned}$$

mit $f : [0,1] \mapsto \mathbb{R}$ stetig.

1. Man bestimme einen Differenzenquotienten $\Delta_3^{2,h} g$ für g mit

$$\Delta_3^{2,h} g(x) - g''(x) = \mathcal{O}(h^3),$$

d.h. mit Fehlerordnung 3.

2. Diskretisieren Sie diese Aufgabe mittels Finiter Differenzen auf den äquidistanten Unterteilung von $(0,1)$ mit Schrittweite h. Verwenden Sie dabei Differenzenquotienten mit Fehlerordnung 2 für alle auftretenden Ableitungen.

3. Stellen Sie das entsprechende lineare Gleichungssystem auf.

Lösung.

1. Wir betrachten die Taylorentwicklung

$$f(x \pm h) = f(x) \pm hf'(x) + \frac{h^2}{2} f''(x) \pm \frac{h^3}{6} f'''(x) + \frac{h^4}{24} f^{(4)}(x) + \mathcal{O}(h^5)$$

und damit

$$f(x \pm 2h) = f(x) \pm 2hf'(x) + \frac{2}{h}^2 f''(x) \pm \frac{4h^3}{3} f'''(x) + \frac{2h^4}{3} f^{(4)}(x) + \mathcal{O}(h^5)$$

und setzen nun an

$$\Delta_3^{2,h} g = \frac{1}{h^2} \sum_{i=-2}^{2} a_i f(x - ih) = f''(x) + \mathcal{O}(h^3)$$

mit gesuchtem a_i, $i = -2, \dots, 2$. Koeffizientenvergleich in den obigen Beziehungen ergibt nun die Gleichungen

$$\begin{aligned} a_0 + a_{-1} + a_1 + a_{-2} + a_2 &= 0, \\ -a_{-1} + a_1 - 2a_{-2} + 2a_2 &= 0, \\ a_{-1} + a_1 + 4a_{-2} + 4a_2 &= 2, \\ -a_{-1} + a_1 - 8a_{-2} + 8a_2 &= 0, \\ a_{-1} + a_1 + 16a_{-2} + 16a_2 &= 0, \end{aligned}$$

Durch Addition/Subtraktion der 2./3. bzw. 4./5. Gleichung folgt $a_1 = a_{-1}$ und $a_2 = a_{-2}$ sowie

$$a_1 + 3a_2 = 1, \quad a_1 + 12a_2 = 0$$

Damit ist $a_1 = a_{-1} = \frac{4}{3}$, $a_2 = a_{-2} = -\frac{1}{9}$ und $a_0 = -\frac{22}{9}$. Dies ist der gesuchte Differenzenquotient.

2. Wir wählen das Gitter $x_i = ih$, $i = 0, \dots, n$ und setzen u_i als Approximation an $u(x_i)$. Wir nutzen die Differenzenquotienten

$$\Delta^{2,h} g(x) = \frac{1}{h^2}(g(x-h) + g(x+h) - 2g(x) \quad \Delta_z^h g(x) = \frac{1}{2h}(g(x+h) - g(x-h)).$$

in x_i, $i = 1, \dots, n-1$. Damit erhalten wir die Gleichungen

$$\frac{1}{h^2}\left(2u_i - u_{i-1} - u_{i+1}\right) + \frac{10}{h}\left(u_{i+1} - u_{i-1}\right) = f(x_i), \quad i = 1, \dots, n-1.$$

Am Rand ist $u_0 = u(x_0) = 1$ und $u_N = u(1) = -1$.

3. Damit lautet das LGS $L_h \underline{u}_h = \underline{f}_h$ mit

$$L_h = \frac{1}{h^2} \begin{bmatrix} 2 & -1+10h & 0 & \dots & 0 \\ -1-10h & 2 & -1+10h & & \vdots \\ 0 & & & \ddots & 0 \\ \vdots & & -1-10h & 2 & -1+10h \\ 0 & \dots & 0 & -1-10h & 2 \end{bmatrix},$$

$$\underline{u}_h = [u_i]_{i=1}^{n-1}, \qquad \underline{f}_h = \begin{bmatrix} f(x_1) + \frac{1}{h^2}(1+10h) \\ f(x_2) \\ \vdots \\ f(x_{n-2}) \\ f(x_{n-1}) + \frac{1}{h^2}(10h-1) \end{bmatrix}$$

□

Aufgabe 9. (Fixpunktverfahren)

Gegeben sei die Gleichung $x^3 = 5x - 1$. Durch grafische Darstellung und/oder Bisektion hat man festgestellt, daß die 3 Nullstellen etwa bei -2.35, 0.20 und 2.10 liegen. Der genaue Wert soll nun durch Fixpunktiteration $x_{k+1} := \varphi(x_k)$ ermittelt werden.

1. Geben Sie verschiedene Fixpunktiterationen an.
2. Welche Konvergenzeigenschaften sind von den zu den Fixpunktgleichungen gehörigen Iterationsverfahren $x_{n+1} = \varphi(x_n)$ in der Umgebung der drei Nullstellen zu erwarten?
3. Mit $x_0 = 2.10$ sind 2 Iterationsschritte einer konvergenten Fixpunktiteration durchzurechnen. und gebe eine Fehlerabschätzung für $|x_7 - x^*|$ an.

Lösung. extra Blatt □

Aufgabe 10. (Fixpunktgleichungen)

Bei gegebenem $a \in \mathbb{R}$ $(a > 0)$ ist $x^* = \sqrt{a}$ Lösung der Fixpunktgleichungen

$$x = \varphi(x) = \frac{a}{x} \tag{1}$$

$$x = \varphi(x) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{a}{x}\right) \tag{2}$$

Man zeige:

1. Das durch (1) festgelegte Iterationsverfahren ist für jeden Startwert $x_0 > 0$ $(x_0 \neq \sqrt{a})$ divergent.
2. Die (2) zugeordnete Iteration konvergiert für alle $x_0 > 0$ gegen $\sqrt{a}$, wobei $\sqrt{a} \leq \ldots \leq x_n \leq x_{n-1} \leq \ldots \leq x_0$.
3. Man zeige, daß das Verfahren (2) mit der Ordnung 2 konvergiert!

Lösung. Siehe Vorlesung, Satz 1.4. □

Aufgabe 11. (Newton-Verfahren)

Gesucht ist die Lösung des nichtlinearen Gleichungssystems

$$\begin{aligned} f(x,y) &= x^2 + y^2 + 0.6y - 0.16 &&= 0 \\ g(x,y) &= x^2 - y^2 + x - 1.6y - 0.14 &&= 0 \end{aligned}$$

1. Schreiben Sie den Ansatz für das Newton-Verfahren auf!
2. Man berechne für den Startwert $[0,0]^\top$ eine Iteration des Newton-Verfahrens!

Lösung.

1. Wir berechnen zunächst die Jacobimatrix F' von $F = [f,g]^\top$,

$$F' = \begin{bmatrix} 2x & 2y + 0.6 \\ 2x + 1 & -2y - 1.6 \end{bmatrix}$$

Damit lautet das Newton-Verfahren:

$$\begin{bmatrix} x^{(k+1)} \\ y^{(k+1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x^{(k)} \\ y^{(k)} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2x^{(k)} & 2y^{(k)} + 0.6 \\ 2x^{(k)} + 1 & -2y^{(k)} - 1.6 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} f(x^{(k)}, y^{(k)}) \\ g(x^{(k)}, y^{(k)}) \end{bmatrix}.$$

2. Damit folgt

$$\begin{bmatrix} x^{(1)} \\ y^{(1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0.6 \\ 1 & 1.6 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0.16 \\ 0.14 \end{bmatrix} = \frac{1}{300} \begin{bmatrix} 43 \\ 40 \end{bmatrix}.$$

$\square$

Aufgabe 12. (Newton-Verfahren)

Eine Funktion $F : D \subset \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ heißt konvex, falls für alle $x, y \in D$ und $\lambda \in [0,1]$ gilt:

$$F(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda F(x) + (1-\lambda)F(y).$$

Es sei nun $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ differenzierbar, streng monoton wachsend und konvex. Weiters habe f eine Nullstelle x^* und für gegebene $z^{(0)} < x^* < x^{(0)}$ sei $x^{(k)}$ die Folge der Newton-Iterierten und

$$z^{(k+1)} = z^{(k)} - \frac{f(z^{(k)})}{f'(x^{(k)})}.$$

Man zeige, dass die Folge $\{z^{(k)}\}_k$ monoton wachsend gegen x^* konvergiert.

Lösung. Wir zeigen zunächst indirekt, daß $f'(x)$ monoton wachsend ist. Es seien dazu $x < y$ mit $f'(x) > f'(y)$. Dann gibt es ein $h > 0$ mit

$$\frac{1}{h}(f(x+h) - f(x)) > \frac{1}{h}(f(y) - f(y-h))$$

oder

$$f(x+h) + f(y-h) > f(x) + f(y).$$

Da f aber konvex ist, gilt

$$f(x + \lambda(y-x)) \leq (1-\lambda)f(x) + \lambda f(y)$$

und

$$f(y + \lambda(x-y)) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y)$$

also

$$f(x + \lambda(y-x)) + f(y + \lambda(x-y)) \leq f(x) + f(y).$$

Mit $h = \lambda(y-x)$ ist dies ein Widerspruch zu

$$f(x+h) + f(y-h) > f(x) + f(y).$$

Also ist $f'(x)$ monoton wachsend. Mit dem 1. MWS der Differentialrechnung gilt $f(x^*) = 0$

$$f(x^{(k)}) = f'(\xi)(x^{(k)} - x^*),$$

also

$$x^{(k+1)} - x^* = x^{(k)} - x^* - f'(x^{(k)})^{-1} f(x^{(k)}) = (x^{(k)} - x^*)\left(1 - f'(x^{(k)})^{-1} f'(\xi)\right)$$

mit $\xi \leq x^{(k)}$. Damit ist (f' monoton wachsend!), $x^{(k+1)} - x^* \geq 0$, falls $x^{(k)} - x^* \geq 0$. Da $x^{(0)} \geq x^*$ folgt damit per Induktion $x^{(k+1)} - x^* \geq 0$.

Weiterhin folgt, daß $\{x^{(k)}\}_k$ monoton fallend ist: Aufgrund der strengen Monotonie von f ist $f'(x) > 0$ und $f(x) > f(x^*) = 00$ für $x > x^*$, also ist für $x = x^{(k)}$

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - f'(x^{(k)})^{-1} f(x^{(k)}) \leq x^{(k)}.$$

Analog folgt mit dem 1. MWS der Differentialrechnung, dass $\{z^{(k)}\}_k$ monoton wachsend ist und nach oben durch x^* beschränkt ist. Damit ist $\{z^{(k)}\}_k$ konvergent. Da f streng monoton ist, ist x^* einzige Lösung der Fixpunktgleichung. $\square$