Institut für Numerische Simulation
Rheinische Friedrich-Wilhelms-Universität Bonn

universitätbonn

Übungen zu Einführung in die Numerische Mathematik (V2E2)

Sommersemester 2016

Prof. Dr. Martin Rumpf — Pascal Huber — Sascha Tölkes

Übungsblatt 1 **Abgabe: 26.04.2016**

Aufgabe 1 (Lineares Differentialgleichungssystem I) 4 Punkte

Zeigen Sie durch Konstruktion mit einer Fixpunktiteration, dass das Anfangswertproblem

$$\begin{aligned} y' &= \mathbf{A}y\,, & \mathbf{A} &\in \mathbb{R}^{n\times n}\,,\\ y(t_0) &= y_0\,, & y_0 &\in \mathbb{R}^n\,, \end{aligned}$$

mit $y : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ eine Lösung der Form

$$y(t) = \exp(\mathbf{A}(t-t_0))y_0$$

hat. Hierbei ist das Matrixexponential einer Matrix $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ definiert durch $\exp(\mathbf{B}) := \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\mathbf{B}^j}{j!}$.

Lösung

Die Fixpunktiteration liefert uns:

$$\begin{aligned} y^0(t) &\equiv y_0\\ y^1(t) &= y_0 + \int_{t_0}^t Ay_0\,ds = y_0 + A(t-t_0)y_0\\ y^2(t) &= y_0 + \int_{t_0}^t A(y_0 + A(s-t_0)y_0)\,ds\\ &= y_0 + \underbrace{\left(\int_{t_0}^t A + A^2(s-t_0)\,ds\right)}_{\in\mathbb{R}^{n,n}} y_0\\ &= \left(\mathbb{1} + A(t-t_0) + \frac{A^2(t-t_0)^2}{2}\right) y_0\\ &\vdots\\ y^k(t) &= \underbrace{\left(\mathbb{1} + A(t-t_0) + \frac{(A(t-t_0))^2}{2!} + \ldots + \frac{(A(t-t_0))^k}{k!}\right)}_{\in\mathbb{R}^{n,n}} y_0 \end{aligned}$$

Diese Reihe von Matrizen ist eine Cauchy-Folge, d.h. für $m < k$ konvergiert

$$\begin{aligned}
\|y^k - y^m\| &= \left\| \left(\sum_{j=m-1}^{k} \frac{A^j (t-t_0)^j}{j!} \right) y_0 \right\| \\
&\leq \left(\sum_{j=m-1}^{k} \frac{\|A^j\| |t-t_0|^j}{j!} \right) \|y_0\| \\
&\leq \left(\sum_{j=m-1}^{k} \frac{C^j \|A\|^j |t-t_0|^j}{j!} \right) \|y_0\| \longrightarrow 0
\end{aligned}$$

für $k, m \to \infty$ und eine Konstante C, die in der Abschätzung $\|AB\| \leq C\|A\| \, \|B\|$ für $n \times n$ Matrizen A, B mit$\|A\| = \left(\sum_{i,j=1,\dots,n} A_{ij}^2 \right)^{\frac{1}{2}}$ auftritt. In diesner Kette von Abschätzungen haben wir die Dreiecksungleichung und das Majorantenkriterium verwendet, letzteres durch Ausnutzung der Tatsache, dass wir bereits wissen, dass die Exponentialreihe für die reelle Zahl $C\|A\||t-t_0|$ konvergiert. Mit der Definition

$$(e^B =) \exp(B) := \sum_{j=0}^{\infty} \frac{B^j}{j!}$$

für Matrizen $B \in \mathbb{R}^{n,n}$ erhalten wir für die Lösung des Anfangswertproblems

$$y(t) = \exp(A(t-t_0)) y_0 \, .$$

Aufgabe 2 (Lineares Differentialgleichungssystem II) 4 Punkte

Betrachten Sie die vektorwertige Differentialgleichung

$$y'(t) = \mathbf{A} y(t) \quad \text{mit} \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \quad y(0) = y_0.$$

Nach Aufgabe 1 ist eine Lösung durch $y(t) = \exp(\mathbf{A}t) y_0$ für $t \in \mathbb{R}$ gegeben. Berechnen Sie $\exp(\mathbf{A}t)$.

Benutzen Sie das Ergebnis um zu zeigen, dass $y(t) = (\cos(t), \sin(t))$ eine Lösung für den Startwert $y_0 = (1, 0)^T$ gegeben ist.

Lösung

Um $\exp(\mathbf{A}t)$ zu berechnen, diagonalisieren wir $\mathbf{A} = \mathbf{B}\mathbf{D}\mathbf{B}^{-1}$:

$$\det \begin{pmatrix} -\lambda & -1 \\ 1 & -\lambda \end{pmatrix} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda^2 + 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda = \pm i \qquad \Rightarrow \quad \mathbf{D} = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$$

Eigenvektoren zum Eigenwert $\lambda_1 = i$ sind Lösungen des Gleichungssystems

$$\begin{pmatrix} -i & -1 \\ 1 & -i \end{pmatrix} v^{(1)} = 0 \qquad \Leftrightarrow \quad v^{(1)} \in \operatorname{span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} \right\}.$$

Eigenvektoren zum Eigenwert $\lambda_2 = -i$ sind Lösungen des Gleichungssystems

$$\begin{pmatrix} i & -1 \\ 1 & i \end{pmatrix} v^{(2)} = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad v^{(2)} \in \operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} \right\}.$$

Damit ergibt sich

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -i & i \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{B}^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & i \\ 1 & -i \end{pmatrix}.$$

Also erhält man

$$\begin{aligned} \exp(\mathbf{A}t) &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -i & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \exp(it) & 0 \\ 0 & \exp(-it) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & i \\ 1 & -i \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \exp(it) & \exp(-it) \\ -i\exp(it) & i\exp(-it) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & i \\ 1 & -i \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \exp(it) + \exp(-it) & i(\exp(it) - \exp(-it)) \\ i(\exp(-it) - \exp(it)) & -i^2(\exp(it) + \exp(-it)) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos(t) & -\sin(t) \\ \sin(t) & \cos(t) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Mit dem Startwert $y_0 = (1,0)^T$ ergibt sich damit als Lösung

$$y(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) & -\sin(t) \\ \sin(t) & \cos(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 3 (Variation der Konstanten) 4 Punkte

Geben Sie die Lösungen der folgenden Anfangswertprobleme an:

(i) $y'(t) = 2ty + t^3, \quad y(0) = y_0$

(ii) $y'(t) = \sin(t)y(t) + \sin(t), \quad y(0) = 0$

Lösung

(i) Zunächst wird die homogene Gleichung gelöst:

$$\dot{x}(t) = 2tx(t), x(0) = 1.$$

Als Lösung erhält man $x(t) = e^{t^2}$.

Zur Lösung der inhomogenen Gleichung betrachtet man

$$\begin{aligned} \dot{y}(t) &= c(t)\dot{x}(t) + \dot{c}(t)x(t) \\ &= \sin(t)y(t) + \dot{c}(t)e^{1-\cos(t)} \end{aligned}$$

und erhält

$$\dot{c}(t) = \frac{t^3}{e^{t^2}}\,.$$

Somit ist

$$\begin{aligned}
c(t) &= \Bigg(y_0 + \underbrace{\int_0^t e^{-s^2} s^3\,ds}_{=\left[-\frac{s^2+1}{2}e^{-s^2}\right]_0^t}\Bigg)\\
&= y_0 + \frac{1}{2} - \frac{t^2+1}{2}e^{-t^2}
\end{aligned}$$

Zur Berechnung des Integrals verwendet man zunächst die Substitution $z = s^2$ und anschließend partielle Integration:

$$\begin{aligned}
\int e^{-s^2} s^3\,ds &= \frac{1}{2}\int e^{-z} z\,dz \qquad\qquad \text{Substitution } z = s^2, \quad dz = 2s\,ds\\
&= \frac{1}{2}\left(-\int -e^{-z} 1\,dz + (-e^{-z}z)\right)\\
&= -\frac{1}{2}(z+1)e^{-z} = -\frac{s^2+1}{2}e^{-s^2}\,.
\end{aligned}$$

Die Lösung der inhomogenen Differentialgleichung ist also

$$y(t) = \left(y_0 + \frac{1}{2} - \frac{t^2+1}{2}e^{-t^2}\right)e^{t^2} = e^{t^2}\left(y_0 + \frac{1}{2}\right) - \frac{t^2+1}{2}\,.$$

(ii) Zuerst lösen wir wieder die homogene Differentialgleichung

$$\dot{x}(t) = \sin(t)x(t)$$

mit Anfangswert $x(0) = 1$. Als Lösung erhält man

$$\begin{aligned}
x(t) &= \exp\left(\int_0^t \sin(s)\,ds\right)\\
&= \exp\left(-\cos(t) + \cos(0)\right)\\
&= e^{1-\cos(t)}\,.
\end{aligned}$$

Die Lösung der inhomogenen Gleichung erhält man dann mit Hilfe der Variation der Konstanten: Setze $y(t) = c(t)x(t)$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
\dot{y}(t) &= c(t)\dot{x}(t) + \dot{c}(t)x(t)\\
&= \sin(t)y(t) + \dot{c}(t)e^{1-\cos(t)}
\end{aligned}$$

und somit

$$\dot{c}(t) = \frac{\sin(t)}{e^{1-\cos(t)}}\,.$$

Schließlich erhält man $c(t)$ als

$$c(t) = \int_0^t \frac{\sin(s)}{e^{1-\cos(s)}} ds = \int_0^t e^{\cos(s)-1} \sin(s) ds$$
$$= -\int_0^{\cos(t)-1} e^z \, dz = -e^{\cos(t)-1} + e^0 \,.$$

Die Lösung der inhomogenen Differentialgleichung ist also

$$y(t) = (-e^{\cos(t)-1} + e^0) e^{1-\cos(t)} = e^{1-\cos(t)} - 1 \,.$$

Aufgabe 4 (Gronwall'sches Lemma) **4 Punkte**

In dieser Aufgabe beweisen Sie das *Gronwall'sche Lemma*, welches ein zentrales Hilfsmittel zum Beweis der Eindeutigkeit für Lösungen von gewöhnlichen Differentialgleichungen ist.

Sei $I = [a, b]$ mit $-\infty < a < b < \infty$ und seien $u, \alpha \in C(I, \mathbb{R})$ sowie $\beta \in C(I, [0, \infty))$ gegeben. Es gelte die Integralungleichung

$$u(t) \leq \alpha(t) + \int_a^t \beta(s) u(s) \, ds \quad \text{für alle } t \in I.$$

Dann besagt das Gronwall'sche Lemma, dass

$$u(t) \leq \alpha(t) + \int_a^t \alpha(s)\beta(s) \exp\left(\int_s^t \beta(r) \, dr \right) ds \quad \text{für alle } t \in I. \tag{1}$$

Beachten Sie, dass die Funktion u in (1) nur noch auf der linken Seite der Ungleichung vorkommt.

Für den Beweis von (1) gehen Sie in zwei Schritten vor:

(i) Sei $v \colon I \to \mathbb{R}$ durch $v(s) := \exp\left(-\int_a^s \beta(r) \, dr\right) \int_a^s \beta(r) u(r) \, dr$ gegeben. Betrachten Sie die Ableitung von v und zeigen Sie mit Hilfe des Fundamentalsatzes der Analysis

$$v(t) \leq \int_a^t \alpha(s)\beta(s) \exp\left(-\int_a^s \beta(r) \, dr \right) ds \quad \text{für alle } t \in I. \tag{2}$$

(ii) Beweisen Sie die Gronwall'sche Ungleichung unter Zuhilfenahme von Gleichung (2).

Lösung

(i) Da die Funktionen β und u stetig sind, folgt nach dem Hauptsatz, dass v differenzierbar ist. Die Ableitung ist gegeben durch

$$v'(s) = \left(u(s) - \int_a^s \beta(r)u(r)\,dr \right) \beta(s) e^{-\int_a^s \beta(r)\,dr}.$$

Mit der angenommenen Integralungleichung folgt daraus

$$v'(s) \le \alpha(s)\beta(s)e^{-\int_a^s \beta(r)\,dr}.$$

Jetzt wird die gesamte Ungleichung integriert und wir erhalten

$$v(t) = v(t) - v(a) = \int_a^t v'(s)\,ds \le \int_a^t \alpha(s)\beta(s)e^{-\int_a^s \beta(r)\,dr}\,ds.$$

(ii) Einsetzen von v in die Integralungleichung führt zu folgenden Abschätzung:

$$u(t) \le \alpha(t) + \exp\left(\int_a^t \beta(r)\,dr \right) v(t).$$

Zuletzt benutzen Teil (i) und vereinfachen

$$\begin{aligned} u(t) &\le \alpha(t) + \int_a^t \alpha(s)\beta(s) \exp\left(\int_a^t \beta(r)\,dr - \int_a^s \beta(r)\,dr \right) ds \\ &= \alpha(t) + \int_a^t \alpha(s)\beta(s) \exp\left(\int_s^t \beta(r)\,dr \right) ds. \end{aligned}$$