Institut für Numerische Simulation
Rheinische Friedrich-Wilhelms-Universität Bonn

universitätbonn

Übungen zu Einführung in die Numerische Mathematik (V2E2)

Sommersemester 2016

Prof. Dr. Martin Rumpf — Pascal Huber — Sascha Tölkes

Übungsblatt 2 — Abgabe: 03.05.2016

Aufgabe 5 (Räuber-Beute-Modell) — 4 Punkte

In der Vorlesung haben Sie das *Räuber-Beute-Modell* kennengelernt:

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= (\alpha - \beta y(t))x(t) \quad \text{mit} \quad \alpha, \beta > 0,\\ \dot{y}(t) &= (-\gamma + \delta x(t))y(t) \quad \text{mit} \quad \gamma, \delta > 0.\end{aligned}$$

Dabei werden durch $x(t)$ und $y(t)$ jeweils die Populationen einer Beutetier- bzw. Raubtierspezies zum Zeitpunkt t beschrieben.

In dieser Aufgabe sollen Sie zeigen, dass die Lösung $(x(t), y(t))$ für jeden Startwert $(x_0, y_0) \in (0, \infty)^2$ eine geschlossene Kurve in der (x, y)-Ebene beschreibt.

(i) Zeigen Sie, dass eine Lösung des Räuber-Beute-Modells für alle $t > t_0$ die folgende Gleichung erfüllt:

$$\gamma \frac{\dot{x}(t)}{x(t)} + \alpha \frac{\dot{y}(t)}{y(t)} - \delta \dot{x}(t) - \beta \dot{y}(t) = 0.$$

(ii) Schließen Sie aus Aufgabenteil (i), dass für jeden Startwert $(x_0, y_0) \in (0, \infty)^2$ die zugehörige Lösungskurve $\{(x(t), y(t)) \in \mathbb{R}^2 \colon t \geq t_0\}$ geschlossen ist.
Tipp: Zeigen Sie dazu, dass alle Lösungskurven Isolinien einer strikt konkaven Funktion sind.

Aufgabe 6 (Zweites Keplersches Gesetz) — 4 Punkte

$x(t) \in \mathbb{R}^2$ sei die Bahnkurve eines Planeten um die Sonne im Ursprung $0 \in \mathbb{R}^2$. Betrachten Sie die Abbildung $x(s, t) = sx(t)$. Zeigen Sie, dass der Strahl $x(t)$ in der Zeit von t_0 bis t_1 die Fläche

$$\mathcal{A}(t_0, t_1) = \int_{t_0}^{t_1} \int_0^1 \left| \left(\det D_{(s,t)} x \right) (s, t) \right| \, \mathrm{d}s \, \mathrm{d}t \,.$$

überstreicht (wobei $D_{(s,t)}x$ die Jacobische der Abbildung x bezüglich der Variablen s und t ist).

Zeigen Sie: Falls die Bahn des Planeten x durch das Kraftgesetz $\ddot{x}(t) = -f(x(t))x(t)$ beschrieben wird, so ist

$$\partial_t \mathcal{A}(t_0, t) \equiv \text{konstant.}$$

Aufgabe 7 (Konvergenz von Runge-Kutta-Verfahren) 4 Punkte

Betrachten Sie das explizite Runge-Kutta-Verfahren mit dem Tableau

$$\begin{array}{c|ccc} 0 & & & \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & & \\ \frac{2}{3} & 0 & \frac{2}{3} & \\ \hline & \frac{1}{4} & 0 & \frac{3}{4} \end{array}$$

zur Lösung der gewöhnlichen Differentialgleichung

$$\dot{x}(t) = F(t, x(t)), \qquad x(t_0) = x_0.$$

Zeigen Sie, dass das Verfahren in dritter Ordnung konvergiert.

Programmieraufgabe 1 (Runge-Kutta-Verfahren)

Implementieren Sie ein explizites Runge-Kutta-Verfahren für ein allgemeines Tableau. Verwenden Sie dieses Verfahren, um für das Räuber-Beute-Modell (Aufgabe 5) mit dem

1. Euler-Verfahren
2. Cauchy-Euler-Verfahren
3. Runge-Kutta-Verfahren 3. Ordnung mit folgendem Tableau

$$\begin{array}{c|ccc} 0 & & & \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & & \\ 1 & -1 & 2 & \\ \hline & \frac{1}{6} & \frac{4}{6} & \frac{1}{6} \end{array}$$

Approximationen zyklischer Lösungen zu berechnen. Verwenden Sie verschiedene Schrittweiten und beobachten Sie, wie gut die zyklischen Lösungen approximiert werden.

Programmieraufgaben: Regeln und Hinweise

- Es müssen mindestens 50% der Programmieraufgaben sinnvoll bearbeitet worden sein.
- Vorgegebene Programmfragmente sowie die Musterlösungen (falls vorhanden) sind in C++ geschrieben.
- Die Cip-Pool Tutoren können zudem Hilfe in C++ geben.
- Abgaben in anderen Programmiersprachen sind nach Absprache mit den Cip-Pool Tutoren prinzipiell möglich, sofern keine programminternen Pakete oder externe Bibliotheken zum Lösen der eigentlichen Aufgaben benutzt werden.
- Programmfragmente in der Klausur sind möglich in genau den Programmiersprachen, die zuvor im Rahmen den Programmieraufgaben von den Tutoren des Cip-Pools akzeptiert und korrigiert worden sind.