Institut für Numerische Simulation
Rheinische Friedrich-Wilhelms-Universität Bonn

universitätbonn

Übungen zu Einführung in die Numerische Mathematik (V2E2)

Sommersemester 2016

Prof. Dr. Martin Rumpf — Pascal Huber — Sascha Tölkes

Übungsblatt 2 — Abgabe: 03.05.2016

Aufgabe 5 (Räuber-Beute-Modell) — 4 Punkte

In der Vorlesung haben Sie das *Räuber-Beute-Modell* kennengelernt:

$$\dot{x}(t) = (\alpha - \beta y(t))x(t) \quad \text{mit} \quad \alpha, \beta > 0,$$
$$\dot{y}(t) = (-\gamma + \delta x(t))y(t) \quad \text{mit} \quad \gamma, \delta > 0.$$

Dabei werden durch $x(t)$ und $y(t)$ jeweils die Populationen einer Beutetier- bzw. Raubtierspezies zum Zeitpunkt t beschrieben.

In dieser Aufgabe sollen Sie zeigen, dass die Lösung $(x(t), y(t))$ für jeden Startwert $(x_0, y_0) \in (0, \infty)^2$ eine geschlossene Kurve in der (x, y)-Ebene beschreibt.

(i) Zeigen Sie, dass eine Lösung des Räuber-Beute-Modells für alle $t > t_0$ die folgende Gleichung erfüllt:

$$\gamma \frac{\dot{x}(t)}{x(t)} + \alpha \frac{\dot{y}(t)}{y(t)} - \delta \dot{x}(t) - \beta \dot{y}(t) = 0.$$

(ii) Schließen Sie aus Aufgabenteil (i), dass für jeden Startwert $(x_0, y_0) \in (0, \infty)^2$ die zugehörige Lösungskurve $\{(x(t), y(t)) \in \mathbb{R}^2 \colon t \geq t_0\}$ geschlossen ist.
Tipp: Zeigen Sie dazu, dass alle Lösungskurven Isolinien einer strikt konkaven Funktion sind.

Lösung

Wir machen uns zunächst klar, dass für Startwerte $(x_0, y_0) \in (0, \infty)^2$ die gesamte Lösungskurve $(x(t), y(t)) \colon t \geq t_0$ im ersten Quadranten enthalten ist.
Angenommen, es gibt ein $t^* > t_0$, so dass $x(t^*) = 0$. Wir betrachten die Zeitumkehr der Lösung. Dazu setzen wir $\tilde{x}(t) := x(2t^* - t), \tilde{y}(t) =:- y(2t^* - t)$. Mit der Räuber-Beute-Gleichung folgt, dass $(\tilde{x}, \tilde{y})$ das folgende Anfangswertproblem erfüllt:

$$\tilde{x}(t) = -\alpha \tilde{x}(t) + \beta \tilde{x}(t)\tilde{y}(t),$$
$$\tilde{y}(t) = \gamma \tilde{y}(t) - \delta \tilde{x}(t)\tilde{y}(t),$$

mit $(\tilde{x}(t^*), \tilde{y}(t^*)) = (0, y(t^*))$. Das ist aber ein Widerspruch zur Eindeutigkeit der Lösung, da auch durch $0, \tilde{y}$ eine Lösung beschrieben wäre. Also muss für alle $t > t_0$ der Lösung gelten, dass $x(t) > 0$ und $y(t) > 0$.

(i) Aus der Räuber-Beute-Gleichung folgt durch einfache Umformung zum einen

$$\gamma\frac{\dot{x}}{x} = \gamma(\alpha - \beta y) \tag{1}$$
$$\alpha\frac{\dot{y}}{y} = \alpha(-\gamma + \delta x) \tag{2}$$

und zum anderen

$$\delta\dot{x} = \delta(\alpha - \beta y)x \tag{3}$$
$$\beta\dot{y} = \beta(-\gamma + \delta x)y. \tag{4}$$

(Für die ersten beiden Umformungen haben wir benutzt, dass die Lösungskurve im esten Quadranten enthalten ist). Nun bilden wir einfach die Summe von (1) + (2) und (3) + (4) und ziehen diese voneinander ab:

$$\begin{aligned}\gamma\frac{\dot{x}}{x} &+ \alpha\frac{\dot{y}}{y} - \delta\dot{x} - \beta\dot{y} \\ &= \gamma(\alpha - \beta y) + \alpha(-\gamma + \delta x) - \delta(\alpha - \beta y)x - \beta(-\gamma + \delta x)y \\ &= 0.\end{aligned}$$

(ii) Wir betrachten die Funktion $V\colon (0,\infty)^2 \to \mathbb{R}$ mit

$$V(x,y) = \gamma\ln(x) + \alpha\ln(y) - \delta x - \beta y.$$

Nach dem Satz von Picard-Lindelöf existiert nun für jedes $t > t_0$ und Startwerte $(x_0, y_0) \in (0,\infty)^2$ eine eindeutige Lösung $(x,y)\colon [t_0, t] \to \mathbb{R}^2$, die wegen der obigen Bemerkung im ersten Quadranten enthalten ist (sodass $V(x(t), y(t))$ wohldefiniert ist). Aus Aufgabenteil (i) wissen wir, dass

$$\frac{dV(x(t),y(t))}{dt} = 0.$$

Damit ist die Kurve $(x(t), y(t))$ in der Isolinie von V zum Funktionswert $V(x_0, y_0)$ enthalten. Es bleibt zu zeigen, dass V strikt konkav ist (denn dann sind die Isolinien geschlossen). Dies folgt aber direkt aus der Tatsache, dass die Hessische von V strikt negative definit ist:

$$D^2V(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{-\gamma}{x^2} & 0 \\ 0 & \frac{-\alpha}{y^2} \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 6 (Zweites Keplersches Gesetz) 4 Punkte

$x(t) \in \mathbb{R}^2$ sei die Bahnkurve eines Planeten um die Sonne im Ursprung $0 \in \mathbb{R}^2$. Betrachten Sie die Abbildung $x(s,t) = sx(t)$. Zeigen Sie, dass der Strahl $x(t)$ in der Zeit von t_0 bis t_1 die Fläche

$$\mathcal{A}(t_0, t_1) = \int_{t_0}^{t_1}\int_0^1 \left|\left(\det D_{(s,t)}x\right)(s,t)\right| \,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}t\,.$$

überstreicht (wobei $D_{(s,t)}x$ die Jacobische der Abbildung x bezüglich der Variablen s und t ist).
Zeigen Sie: Falls die Bahn des Planeten x durch das Kraftgesetz $\ddot{x}(t) = -f(x(t))x(t)$ beschrieben wird, so ist

$$\partial_t \mathcal{A}(t_0, t) \equiv \text{konstant.}$$

Lösung

Es gilt

$$\int_{\{x(s,t)|s\in[0,1],t\in[t_0,t_1]\}} 1\,\mathrm{d}a = \int_{\{[0,1]\times[t_0,t_1]\}} 1 \left|\left(\det D_{(s,t)}x\right)(s,t)\right| \mathrm{d}a\,.$$

Somit beschreibt

$$\mathcal{A}(t_0, t_1) = \int_{t_0}^{t_1} \int_0^1 \left|\left(\det D_{(s,t)}x\right)(s,t)\right| \mathrm{d}s\,\mathrm{d}t\,. \tag{5}$$

die überstrichene Fläche.
Mit Hilfe der Jacobischen

$$D_{(s,t)} = \begin{pmatrix} x_1(t) & s\dot{x}_1(t) \\ x_2(t) & s\dot{x}_2(t) \end{pmatrix}$$

lässt sich Gleichung 5 umformen:

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}(t_0, t_1) &= \int_0^1 s\,\mathrm{d}s \int_{t_0}^{t_1} |x_1(t)\dot{x}_2(t) - x_2(t)\dot{x}_1(t)|\;\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_1} |x_1(t)\dot{x}_2(t) - x_2(t)\dot{x}_1(t)|\;\mathrm{d}t \\
\Rightarrow \partial_t \mathcal{A}(t_0, t) &= \frac{1}{2} |x_1(t)\dot{x}_2(t) - x_2(t)\dot{x}_1(t)|
\end{aligned}$$

Man darf annehmen, dass $x_1(t)\dot{x}_2(t) - x_2(t)\dot{x}_1(t) > 0$ (andernfalls zerlegt man die Kurve gemäß dem Vorzeichen in Intervalle). Dann gilt

$$\begin{aligned}
(\partial_t)^2 \mathcal{A}(t_0, t) &= \frac{1}{2}\left(\dot{x}_1(t)\dot{x}_2(t) - \dot{x}_2(t)\dot{x}_1(t) + x_1(t)\ddot{x}_2(t) - x_2(t)\ddot{x}_1(t)\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(0 - \left(x_1(t)f(x(t))x_2(t) - x_2(t)f(x(t))x_1(t)\right)\right) \\
&= 0\,.
\end{aligned}$$

Aufgabe 7 (Konvergenz von Runge-Kutta-Verfahren) 4 Punkte

Betrachten Sie das explizite Runge-Kutta-Verfahren mit dem Tableau

$$\begin{array}{c|ccc}
0 & & & \\
\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & & \\
\frac{2}{3} & 0 & \frac{2}{3} & \\
\hline
 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{3}{4}
\end{array}$$

zur Lösung der gewöhnlichen Differentialgleichung

$$\dot{x}(t) = F(t, x(t)), \qquad x(t_0) = x_0.$$

Zeigen Sie unter der Annahme $F \in C^3(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$, dass das Verfahren in dritter Ordnung konvergiert.

Lösung

Zur Einfachheit betrachten wir nur das eindimensionale Problem. Die explizite Formel für das angegebene Runge-Kutta-Verfahren lautet:

$$\hat{\Phi}_{t+\tau,t}x = x + \tfrac{\tau}{4}F(t,x) + \tfrac{3\tau}{4}F\left(t + \tfrac{2\tau}{3}, x + \tfrac{2\tau}{3}F(t + \tfrac{\tau}{3}, x + \tfrac{\tau}{3}F(t,x))\right).$$

Um die Konvergenz des Verfahrens zu zeigen, verwenden wir den Konvergenzsatz aus der Vorlesung (Satz 1.14). Demnach müssen wir die Konsistenzordnung des Runge-Kutta-Verfahrens berechnen und sicherstellen, dass die diskrete Evolution stabil ist. Die Stabilität folgt direkt aus der Glattheit der Funktion F.

Zur Berechnung des Konsistenzfehlers müssen wir $\hat{\Phi}_{t+\tau,t}x$ in einer (zugegebenermaßen etwas länglichen) Taylorreihe um (t, x) entwickeln. Für den dritten Term von $\hat{\Phi}_{t+\tau,t}x$ erhalten wir

$$\begin{aligned}&\tfrac{3\tau}{4}F\left(t + \tfrac{2\tau}{3}, x + \tfrac{2\tau}{3}F(t + \tfrac{\tau}{3}, x + \tfrac{\tau}{3}F(t,x))\right)\\ &\quad = \tfrac{3\tau}{4}F + \tfrac{\tau^2}{2}(FF_x + F_t) + \tfrac{\tau^3}{6}\Big(F(F_x)^2 + F_tF_x + F^2F_{xx} + 2FF_{tx} + F_tt\Big) + \mathcal{O}(\tau^4),\end{aligned}$$

wobei wir zur besseren Lesbarkeit $F(t, x)$ mit F und die partiellen Ableitungen $\partial_x F(t, x), \partial_t F(t, x), \partial_{xx} F(t, x), \partial_{tt} F(t, x)$ und $\partial_{tx} F(t, x)$ jeweils mit F_x, F_t, F_{xx}, F_{tt} bzw. F_{tx} abgekürzt haben. Wir erhalten also für $\hat{\Phi}_{t+\tau,t}x$ die folgende Entwicklung:

$$\hat{\Phi}_{t+\tau,t}x = x + \tfrac{\tau}{4}F + \tfrac{\tau^2}{2}(FF_x + F_t) + \tfrac{\tau^3}{6}\Big(F(F_x)^2 + F_tF_x + F^2F_{xx} + 2FF_{tx} + F_tt\Big) + \mathcal{O}(\tau^4).$$

Andererseits können wir auch den exakten Phasenfluss $\Phi_{t+\tau,t}x = x(t + \tau)$ um t entwickeln:

$$\Phi_{t+\tau,t}x = x(t) + \tau\dot{x}(t) + \tfrac{\tau^2}{2}\ddot{x}(t) + \tfrac{\tau^3}{6}\dddot{x}(t) + \mathcal{O}(\tau^4).$$

Wegen $\dot{x} = F(t, x)$ erhalten wir daraus

$$\begin{aligned}\Phi_{t+\tau,t}x &= x(t) + \tau F(t, x(t)) + \tfrac{\tau^2}{2}\tfrac{dF(t,x(t))}{dt} + \tfrac{\tau^3}{6}\tfrac{d^2F(t,x(t))}{dt^2} + \mathcal{O}(\tau^4)\\ &= x + \tau F + \tfrac{\tau^2}{2}(F_t + FF_x) + \tfrac{\tau^3}{6}\Big(F_{tt} + 2FF_{tx} + F^2F_{xx} + F_xF_t + F(F_x)^2\Big) + \mathcal{O}(\tau^4).\end{aligned}$$

Durch Koeffizientenvergleich der Entwicklungen von $\Phi_{t+\tau,t}x$ und $\hat{\Phi}_{t+\tau,t}x$ erhalten wir schließlich eine Konsistenzordnung von drei, was den Beweis mit Satz 1.14 beendet.

Programmieraufgabe 1 (Runge-Kutta-Verfahren)

Implementieren Sie ein explizites Runge-Kutta-Verfahren für ein allgemeines Tableau. Verwenden Sie dieses Verfahren, um für das Räuber-Beute-Modell (Aufgabe 5) mit dem

1. Euler-Verfahren

2. Cauchy-Euler-Verfahren

3. Runge-Kutta-Verfahren 3. Ordnung mit folgendem Tableau

$$
\begin{array}{c|ccc}
0 & & & \\
\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & & \\
1 & -1 & 2 & \\
\hline
 & \frac{1}{6} & \frac{4}{6} & \frac{1}{6}
\end{array}
$$

Approximationen zyklischer Lösungen zu berechnen. Verwenden Sie verschiedene Schrittweiten und beobachten Sie, wie gut die zyklischen Lösungen approximiert werden.

Programmieraufgaben: Regeln und Hinweise

- Es müssen mindestens 50% der Programmieraufgaben sinnvoll bearbeitet worden sein.
- Vorgegebene Programmfragmente sowie die Musterlösungen (falls vorhanden) sind in C++ geschrieben.
- Die Cip-Pool Tutoren können zudem Hilfe in C++ geben.
- Abgaben in anderen Programmiersprachen sind nach Absprache mit den Cip-Pool Tutoren prinzipiell möglich, sofern keine programminternen Pakete oder externe Bibliotheken zum Lösen der eigentlichen Aufgaben benutzt werden.
- Programmfragmente in der Klausur sind möglich in genau den Programmiersprachen, die zuvor im Rahmen den Programmieraufgaben von den Tutoren des Cip-Pools akzeptiert und korrigiert worden sind.