Institut für Numerische Simulation
Rheinische Friedrich-Wilhelms-Universität Bonn

universitätbonn

Übungen zu Einführung in die Numerische Mathematik (V2E2)

Sommersemester 2016

Prof. Dr. Martin Rumpf — Pascal Huber — Sascha Tölkes

Übungsblatt 3 — Abgabe: 10.05.2016

Aufgabe 8 (Schrittweitenabschätzung) — 4 Punkte

Betrachten Sie die skalare Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$\ddot{x}(t) + \mu^2 x(t) = F(x(t)), \quad x(0) = x_0, \quad \dot{x}(0) = v_0$$

mit Koeffizient $\mu > 0$, Startwerten $x_0, v_0 \in \mathbb{R}$ und einer (möglicherweise nichtlinearen) Funktion $F \in C^1(\mathbb{R})$.

Untersuchen Sie das qualitative Verhalten der Lösung $x(t)$ für den Fall $|F'(x)| \ll \mu^2$. In welcher Größenordnung müsste eine vernünftige Schrittweite τ für einen numerischen Integrator liegen?

Aufgabe 9 (Explizites Euler-Verfahren) — 4 Punkte

Betrachten Sie die skalare Differentialgleichung

$$\dot{x}(t) = \lambda \left(1 - x(t)^2\right), \quad \lambda > 0 \qquad \text{mit} \quad x(0) = x_0\,.$$

(i) Zeigen Sie: Die Gleichung hat einen stabilen Fixpunkt bei $x_s = 1$ und einen instabilen Fixpunkt bei $x_i = -1$.

(ii) Betrachten Sie das explizite Euler-Verfahren für die linearisierte Gleichung in der Nähe des stabilen Fixpunktes x_s. Welche Bedingung muss die Zeitschrittweite τ erfüllen, damit das explizite Euler-Verfahren gegen den Fixpunkt konvergiert?

Aufgabe 10 (Implizites Euler-Verfahren) — 4 Punkte

Betrachten Sie die autonome Differentialgleichung aus Aufgabe 9

$$\dot{x}(t) = \lambda \left(1 - x(t)^2\right), \quad \lambda > 0 \qquad \text{mit} \quad x(0) = x_0\,.$$

Zeigen Sie, dass für das implizite Euler-Verfahren

$$\hat{\Phi}_\tau x = g_1 \quad \text{mit} \quad g_1 = x + \tau\lambda(1 - g_1^2)$$

zwei mögliche Werte $g_1^\pm \in \mathbb{R}$ in Frage kommen. Es stellt sich die Frage, ob dies ein Widerspruch zum Satz über die eindeutige Lösbarkeit von impliziten Runge-Kutta-Verfahren (Satz 1.37 aus der Vorlesung) ist. Zeigen Sie, dass für kleine Schrittweiten τ einer der beiden Werte $g_1^\pm$ nicht zur numerischen Lösung der Gleichung verwendet werden kann.

Programmieraufgabe 2 (Reaktion dreier Spezies)

Das Differentialgleichungssystem

$$\begin{aligned}
\dot{x}(t) &= -0.04x(t) + 10^4 y(t)z(t) \\
\dot{y}(t) &= 0.04x(t) - 10^4 y(t)z(t) - 3 \cdot 10^7 y(t)^2 \\
\dot{z}(t) &= 3 \cdot 10^7 y(t)^2
\end{aligned}$$

beschreibt die Reaktion dreier Spezies.
Implementieren Sie das in Beispiel 1.25 der Vorlesung beschriebene explizite Runge-Kutta-Verfahren mit Schrittweitensteuerung, um für die Startwerte

$$x(0) = 1, \quad y(0) = 0, \quad z(0) = 0$$

die Lösung zum Zeitpunkt $t = 0.3$ zu approximieren. Verwenden Sie hierzu verschiedene Toleranzen von $\mathrm{TOL} = 10^{-2}, \dots, 10^{-9}$ und die Schwellwerte $\widehat{\epsilon} = 1$ und $\widehat{\epsilon} = 10^{-5}$.

Tableaus aus Beispiel 1.25:

$$\begin{array}{r|ccccc}
 & 0 & & & & \\
 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & & & \\
 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & & \\
 & 1 & 0 & 0 & 1 & \\
 & 1 & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \\
\hline
\text{4. Ordnung} & 1 & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \\
\hline
\text{5. Ordnung} & & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \quad \frac{1}{6}
\end{array}$$