Institut für Numerische Simulation
Rheinische Friedrich-Wilhelms-Universität Bonn

universitätbonn

Übungen zu Einführung in die Numerische Mathematik (V2E2)

Sommersemester 2016

Prof. Dr. Martin Rumpf — Pascal Huber — Sascha Tölkes

Übungsblatt 4 — Abgabe: 24.05.2016

Aufgabe 11 (Alternative, abstrakte Interpolationsfehlerabschätzung) — 4 Punkte

Sei $\mathcal{I}_h : C^{n+1}([a,b]) \to \mathcal{P}_n, f \mapsto P_{t_0,\dots t_n} f$ für $t_0, \dots t_n \in [a,b]$ ein Interpolationsoperator.

(i) Zeigen Sie $||\mathcal{I}_h f||_{\infty,[a,b]} \leq C||f||_{\infty,[a,b]}$ (Stabilität der Interpolation).

(ii) Folgern Sie daraus $||f - \mathcal{I}_h f||_{\infty,[a,b]} \leq C \inf_{q \in \mathcal{P}_n} ||f - q||_{\infty,[a,b]}$.

(iii) Schließen Sie unter Verwendung der Taylorentwicklung,
dass $||f - \mathcal{I}_h f||_{\infty,[a,b]} \leq C(b-a)^{n+1}||f^{(n+1)}||_{\infty,[a,b]}$.

Aufgabe 12 (Rationale Interpolation) — 4 Punkte

Seien $t_0 < t_1 < \dots < t_n \in \mathbb{R}$ und $f \in C(\mathbb{R}), f(t_i) = f_i$ gegeben. Gesucht sind Polynome $p \in \mathcal{P}_k$ und $q \in \mathcal{P}_l$ mit $k + l = n$, so dass

$$p(t_i) = f_i\, q(t_i) \qquad \text{für alle } 0 \leq i \leq n\,.$$

(i) Zeigen Sie, dass diese Interpolationsaufgabe eine nichttriviale Lösung besitzt.

(ii) Geben Sie ein Beispiel an, für das $\frac{p}{q}$ nicht die Funktion f interpoliert.

Aufgabe 13 (Hermite-Interpolationspolynom) — 4 Punkte

Bestimmen Sie das Hermite-Interpolationspolynom $p_5 \in \mathcal{P}_5$, das die Bedingungen

$$p_5(1) = -4,\ p_5'(1) = -7,\ p_5''(1) = -8,\ p_5(2) = -14,\ p_5'(2) = -8,\ p_5(3) = 14$$

erfüllt.

Aufgabe 14 (Hermite-Interpolationspolynom als Grenzwert) — 4 Punkte

Gegeben seinen die Werte $y_0,\ y_1,\ z_0 \in \mathbb{R}$.

(i) Berechnen Sie das Interpolationspolynom zweiten Grades $p_\epsilon(x)$ mit
$p_\epsilon(0) = y_0,\ p_\epsilon(1) = y_1$ und $p_\epsilon(\epsilon) = y_0 + \epsilon z_0$ für $\epsilon \in (0,1)$.

(ii) Berechnen Sie das Hermite-Interpolationspolynom zweiten Grades $p(x)$ mit
$p(0) = y_0,\ p(1) = y_1$ und $p'(0) = z_0$.

(iii) Zeigen Sie, dass p_ϵ für $\epsilon \to 0$ gegen p bzgl. der Unendlichnorm $\|\cdot\|_\infty$ konvergiert ($\|g\|_\infty := \max_{x\in[0,1]} |g(x)|$).