Institut für Numerische Simulation
Rheinische Friedrich-Wilhelms-Universität Bonn

universität**bonn**

Übungen zu Einführung in die Numerische Mathematik (V2E2)

Sommersemester 2016

Prof. Dr. Martin Rumpf — Pascal Huber — Sascha Tölkes

Übungsblatt 4 — Abgabe: 24.05.2016

Aufgabe 11 (Alternative, abstrakte Interpolationsfehlerabschätzung) 4 Punkte

Sei $\mathcal{I}_h : C^{n+1}([a,b]) \to \mathcal{P}_n, f \mapsto P_{t_0,\ldots t_n} f$ für $t_0, \ldots t_n \in [a,b]$ ein Interpolationsoperator.

(i) Zeigen Sie $||\mathcal{I}_h f||_{\infty,[a,b]} \le C||f||_{\infty,[a,b]}$ (Stabilität der Interpolation).

(ii) Folgern Sie daraus $||f - \mathcal{I}_h f||_{\infty,[a,b]} \le C \inf_{q\in\mathcal{P}_n} ||f-q||_{\infty,[a,b]}$.

(iii) Schließen Sie unter Verwendung der Taylorentwicklung, dass $||f - \mathcal{I}_h f||_{\infty,[a,b]} \le C(b-a)^{n+1}||f^{(n+1)}||_{\infty,[a,b]}$.

Lösung

a) Die dazugehörige Matrix zum Interpolationsproblem ist A^{-1} (A ist die Matrix aus dem Existenz- und Eindeutigkeitssatz, Vandermondematrix). Die Einträge von A^{-1} sind beschränkt durch eine Konstante $\bar{C}$ ($\bar{C}$ hängt von der Wahl der Knoten $\{t_i\}_{i=0,\ldots,n}$ ab). Damit folgt:

$$\max_{i=0,\ldots,n} |a_i(f)| \le \bar{C} \max_{i=0,\ldots,n} |f(t_i)|$$

a_i sind die Koeffizienten des Interpolationsproblem. Nun gilt für die Interpolation $\mathcal{I}_h(f) = (t \mapsto a_0(f) + a_1(f)t + \ldots + a_n(f)t^n)$ mit der Abkürzung $a_i = a_i(f)$:

$$\begin{aligned}
&\|\mathcal{I}_h(f)\|_\infty = \max_{t\in[a,b]} |a_0 + a_1 t + \ldots + a_n t^n| \\
&\le \max_{t\in[a,b]} \left(\left(\sum_{i=0,\ldots,n} |a_i| \right) \max_{i=0,\ldots,n} t^i \right) \\
&\le (n+1) \underbrace{\left(\sum_{i=0,\ldots,n} |a_i| \right)}_{\le C \max_{i=0,\ldots,n} |f_i| \le \bar{C} \max_{t\in[a,b]} |f(t)|} \underbrace{\max_{t\in[a,b]} \left(\max_{i=0,\ldots,n} t^i \right)}_{\le C(a,b)} \\
&\le \bar{C}\, C(a,b) \|f\|_\infty .
\end{aligned}$$

b) $\mathcal{I}_h : \mathcal{C}^0 \to \mathcal{P}_n$ ist eine lineare Abbildung und es gilt $\mathcal{I}_h(p) = p$ für alle $p \in \mathcal{P}_n$ (Eindeutigkeit der Interpolation).

$$\begin{aligned}
\|f - \mathcal{I}_h(f)\|_\infty &= \|f - q + q - \mathcal{I}_h(f)\|_\infty \quad \text{für ein beliebiges } q \in \mathcal{P}^n \\
&\overset{\mathcal{I}_h(q)=q}{=} \|f - q + \mathcal{I}_h(q) - \mathcal{I}_h(f)\|_\infty \\
&\leq \|f - q\|_\infty + \|\mathcal{I}_h(q - f)\|_\infty \\
&\quad \text{(wegen Dreiecksungleichung und Linearität von } \mathcal{I}_h\text{)} \\
&\overset{1.}{\leq} \tilde{C}\|f - q\|_\infty
\end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned}
\|f - \mathcal{I}_h(f)\|_\infty &= \|f - q + q - \mathcal{I}_h(f)\|_\infty \\
&\quad \left[q(t) = f(a) + f'(a)(t-a) + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(t-a)^n\right] \\
&\quad \text{(Taylorentwicklung in } a \text{ vom Grad } n, q \text{ ist also Polynom)} \\
&\overset{\mathcal{I}_h(q)=q}{=} \|f - q + \mathcal{I}_h(q) - \mathcal{I}_h(f)\|_\infty \\
&\leq \|f - q\|_\infty + \|\mathcal{I}_h(q - f)\|_\infty \\
&\quad \text{(wegen Dreiecksungleichung und Linearität von } \mathcal{I}_h\text{)} \\
&\overset{1.}{\leq} \tilde{C}\|f - q\|_\infty \\
&\leq \tilde{C} \max_{t \in I} \left|\frac{f^{(n+1)}(\xi)(t-a)^{n+1}}{(n+1)!}\right| \\
&\leq C(b-a)^{n+1}\|f^{(n+1)}\|_{\infty,[a,b]}
\end{aligned}$$

Aufgabe 12 (Rationale Interpolation) **4 Punkte**

Seien $t_0 < t_1 < \ldots < t_n \in \mathbb{R}$ und $f \in C(\mathbb{R}), f(t_i) = f_i$ gegeben. Gesucht sind Polynome $p \in \mathcal{P}_k$ und $q \in \mathcal{P}_l$ mit $k + l = n$, so dass

$$p(t_i) = f_i \, q(t_i) \quad \text{für alle } 0 \leq i \leq n\,.$$

(i) Zeigen Sie, dass diese Interpolationsaufgabe eine nichttriviale Lösung besitzt.

(ii) Geben Sie ein Beispiel an, für das $\frac{p}{q}$ nicht die Funktion f interpoliert.

Lösung

a) Betrachte die Matrixdarstellung des LGS: $A \cdot x = 0$, wobei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & t_0 & \cdots & t_0^k & f_0 & \cdots & f_0 t_0^l \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & t_n & \cdots & t_n^k & f_n & \cdots & f_n t_n^l \end{pmatrix}$$

und $x = (p_0, \cdots, p_k, q_0, \cdots, q_l)^T$.

Dabei ist A eine $(n+1) \times (n+2)$ Matrix, hat also einen Rang $\leq n+1$. Die Dimension der Kerns ist $n+2-dim(Im\,A) = n+2-rang\,A \geq 1$. Also besitzt das LGS insbesondere nichttriviale Lösungen.

b) Wählt man $t_0 = f_0 = 0$ und $t_1 = f_1 = 1$, $k = 0, l = 1$ so ist $\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ Basis des Lösungsraumes. Die entstehende Interpolierende

$$\frac{p}{q}(x) = \frac{0}{mx - m} = 0, \qquad \text{(für beliebiges } m \neq 0\text{)},$$

für $x \neq 1$ nimmt jedoch nicht die geforderten Werte an. (Null durch Null für $x = 1$).

Aufgabe 13 (Hermite-Interpolationspolynom) 4 Punkte

Bestimmen Sie das Hermite-Interpolationspolynom $p_5 \in \mathcal{P}_5$, das die Bedingungen

$$p_5(1) = -4,\ p_5'(1) = -7,\ p_5''(1) = -8,\ p_5(2) = -14,\ p_5'(2) = -8,\ p_5(3) = 14$$

erfüllt.

Lösung

Man kann entweder das Newton Schema benutzen oder das Gleichungssystem direkt lösen. Wir zeigen beide Möglichkeiten:

- *Newton Schema*: Wir benutzen die dividierten Differenzen

$$[x_i]p = p(x_i),$$
$$[x_i, \ldots, x_{i+k}]p = \begin{cases} \frac{1}{k!} p^{(k)}(x_i), & \text{if } x_i = \cdots = x_{i+k}, \\ \frac{[x_{i+1},\ldots,x_{i+k}]p - [x_i,\ldots,x_{i+k-1}]p}{x_{i+k}-x_i}, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

Damit ergibt sich mit $x_0 = x_1 = x_2 = 1$, $x_3 = x_4 = 2$ und $x_5 = 2$ das Schema

$$\begin{array}{lcccccccccc}
[x_0]p = -4 & & & & & & & & & & \\
 & \searrow & & & & & & & & & \\
[x_1]p = -4 & \longrightarrow & -7 & & & & & & & & \\
 & \searrow & & \searrow & & & & & & & \\
[x_2]p = -4 & \longrightarrow & -7 & \longrightarrow & -4 & & & & & & \\
 & \searrow & & \searrow & & \searrow & & & & & \\
[x_3]p = -14 & \longrightarrow & -10 & \longrightarrow & -3 & \longrightarrow & 1 & & & & \\
 & \searrow & & \searrow & & \searrow & & \searrow & & & \\
[x_4]p = -14 & \longrightarrow & -8 & \longrightarrow & 2 & \longrightarrow & 5 & \longrightarrow & 4 & & \\
 & \searrow & & \searrow & & \searrow & & \searrow & & \searrow & \\
[x_5]p = -14 & \longrightarrow & 28 & \longrightarrow & 26 & \longrightarrow & 17 & \longrightarrow & 6 & \longrightarrow & 1.
\end{array}$$

Damit sie die Koeffizienten $c_i = [x_0, \ldots, x_i]p$ des Newtonschen Interpolationspolynoms

$$p_5(x) = c_0 + c_1(x - x_0) + c_2(x - x_0)(x - x_1) + \cdots + c_5(x - x_0)\cdots(x - x_4)$$

bestimmt und man erhält $p_5(x) = x^5 - 3x^4 + 4x^2 - 8x + 2$.

- *Lösung des Gleichungssystems*: Es gilt

$$\begin{aligned}
p_5(x) &= a_5x^5 + a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0,\\
p_5'(x) &= 5a_5x^4 + 4a_4x^3 + 3a_3x^2 + 2a_2x + a_1,\\
p_5''(x) &= 20a_5x^3 + 12a_4x^2 + 6a_3x + 2a_2.
\end{aligned}$$

Die Bedingungen ergeben das folgende Gleichungssystem:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 5 & 4 & 3 & 2 & 1 & 0 \\ 20 & 12 & 6 & 2 & 0 & 0 \\ 32 & 16 & 8 & 4 & 2 & 1 \\ 80 & 32 & 12 & 4 & 1 & 0 \\ 243 & 81 & 27 & 9 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_5 \\ a_4 \\ a_3 \\ a_2 \\ a_1 \\ a_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ -7 \\ -8 \\ -14 \\ -8 \\ 14 \end{pmatrix}.$$

Man erhält $p_5(x) = x^5 - 3x^4 + 4x^2 - 8x + 2$.

Aufgabe 14 (Hermite-Interpolationspolynom als Grenzwert) 4 Punkte

Gegeben seinen die Werte $y_0,\ y_1,\ z_0 \in \mathbb{R}$.

(i) Berechnen Sie das Interpolationspolynom zweiten Grades $p_\epsilon(x)$ mit $p_\epsilon(0) = y_0,\ p_\epsilon(1) = y_1$ und $p_\epsilon(\epsilon) = y_0 + \epsilon z_0$ für $\epsilon \in (0, 1)$.

(ii) Berechnen Sie das Hermite-Interpolationspolynom zweiten Grades $p(x)$ mit $p(0) = y_0,\ p(1) = y_1$ und $p'(0) = z_0$.

(iii) Zeigen Sie, dass p_ϵ für $\epsilon \to 0$ gegen p bzgl. der Unendlichnorm $\|\cdot\|_\infty$ konvergiert ($\|g\|_\infty := \max_{x\in[0,1]} |g(x)|$).

Lösung

Man rechnet einfach nach:

a) $p_\epsilon(x) = \frac{y_1 - y_0 - z_0}{1-\epsilon}x^2 + \left(z_0 - \frac{y_1-y_0-z_0}{1-\epsilon}\epsilon\right) x + y_0$

b) $p(x) = (y_1 - y_0 - z_0)x^2 + z_0x + y_0$

c) $p_\epsilon(x) - p(x) = \frac{\epsilon}{1-\epsilon}(y_1 - y_0 - z_0)(x^2 - x)$, also ist die Unendlichnorm auf $[0, 1]$ für genügend kleines ϵ durch $C\epsilon$ beschränkt.