Institut für Numerische Simulation
Rheinische Friedrich-Wilhelms-Universität Bonn

universitätbonn

Übungen zu Einführung in die Numerische Mathematik (V2E2)

Sommersemester 2016

Prof. Dr. Martin Rumpf — Pascal Huber — Sascha Tölkes

Übungsblatt 6 — Abgabe: 07.06.2016

Aufgabe 19 (Tensorprodukt-Bézierpolynome) — 4 Punkte

Es bezeichne $B_i^n \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ das i-te Bernsteinpolynom vom Grad n. Auf dem geschlossenen Einheitsquadrat $[0,1]^2$ definieren wir die Tensorprodukt-Bézierpolynome

$$P(x,y) = \sum_{i,j=0}^{n} b_{i,j} B_i^n(x) B_j^n(y) \quad \text{mit} \quad b_{i,j} \in \mathbb{R} \quad \text{für} \quad 0 \leq i,j \leq n.$$

Zeigen Sie:

(i) $\{B_i^n(x)B_j^n(y)\}_{i,j=0,\dots,n}$ ist eine nichtnegative Zerlegung der Eins auf $[0,1]^2$.

(ii) Für die partiellen Polynome

$$b_{i,j}^{k,l}(x,y) = \sum_{r=0}^{k} \sum_{q=0}^{l} b_{i+r,j+q} B_r^k(x) B_q^l(y), \quad (0 \leq k,l \leq n),$$

mit $0 \leq i \leq n-k$ und $0 \leq j \leq n-l$ gilt das folgende De Casteljau-Schema:

$$\begin{aligned}
b_{i,j}^{0,0}(x,y) &= b_{i,j}, \\
b_{i,j}^{k,l}(x,y) &= b_{i,j}^{k-1,l-1}(x,y)(1-x)(1-y) + b_{i+1,j}^{k-1,l-1}(x,y)x(1-y) \\
&\quad + b_{i,j+1}^{k-1,l-1}(x,y)(1-x)y + b_{i+1,j+1}^{k-1,l-1}(x,y)xy, \\
b_{0,0}^{n,n}(x,y) &= P(x).
\end{aligned}$$

(iii) Skizzieren Sie den daraus hervorgehenden Berechnungsalgorithmus für $P(\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$ im Fall $n = 3$ an einem Beispiel grafisch.

Aufgabe 20 (De Casteljau-Schema) 4 Punkte

Betrachten Sie das Polynom $P(x,y) = (1-x)x(1-y)y$ auf $[0,1]^2$. Definieren Sie die Bézierpunkte $\{b_{i,j}\}_{i,j=0,\ldots,3}$ für ein Bézierpolynom aus $\mathcal{P}^3 \otimes \mathcal{P}^3$. Berechnen Sie $P(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ mit dem De Casteljau-Schema (siehe Aufgabe 19).

Aufgabe 21 (Integration von Bézierpolynomen) 4 Punkte

Beweisen Sie, dass für das Bézierpolynom $P(t) = \sum_{i=0}^{n} b_i B_i^n(t)$ mit $b_i \in \mathbb{R}$ gilt

$$\int_0^1 P(t)\, dt = \frac{1}{n+1} \left(\sum_{i=0}^{n} b_i \right).$$

Programmieraufgabe 3 (Bézierflächen)

Zeichnen Sie eine Fläche im $\mathbb{R}^3$, die durch vier gegebene kubische Tensorprodukt-Bézier-Patches beschrieben wird. Approximieren Sie jeden Patch z. B. durch 10×10 Vierecke.
Die Koordinaten der Kontrollpunkte für die vier Bézier-Patches können Sie einer Textdatei auf der Webseite entnehmen.

`http://numod.ins.uni-bonn.de/teaching/ss16/numerik/`

Dort finden Sie auch Hinweise, wie sie Ihr Ergebnis darstellen können.
Hinweis: Seien $p_{ij} \in \mathbb{R}^3$ für $i,j = 0,\ldots 3$ die Kontrollpunkte eines Patches. Dann hat die Datei das folgende Format:

$$\begin{array}{ccc}
p_{00}^{(1)} & p_{00}^{(2)} & p_{00}^{(3)} \\
p_{01}^{(1)} & p_{01}^{(2)} & p_{01}^{(3)} \\
p_{02}^{(1)} & p_{02}^{(2)} & p_{02}^{(3)} \\
p_{03}^{(1)} & p_{03}^{(2)} & p_{03}^{(3)} \\
\\
p_{10}^{(1)} & p_{10}^{(2)} & p_{10}^{(3)} \\
p_{11}^{(1)} & p_{11}^{(2)} & p_{11}^{(3)} \\
p_{12}^{(1)} & p_{12}^{(2)} & p_{12}^{(3)} \\
p_{13}^{(1)} & p_{13}^{(2)} & p_{13}^{(3)} \\
\\
p_{20}^{(1)} & p_{20}^{(2)} & p_{20}^{(3)} \\
p_{21}^{(1)} & p_{21}^{(2)} & p_{21}^{(3)} \\
p_{22}^{(1)} & p_{22}^{(2)} & p_{22}^{(3)} \\
p_{23}^{(1)} & p_{23}^{(2)} & p_{23}^{(3)} \\
\\
p_{30}^{(1)} & p_{30}^{(2)} & p_{30}^{(3)} \\
p_{31}^{(1)} & p_{31}^{(2)} & p_{31}^{(3)} \\
p_{32}^{(1)} & p_{32}^{(2)} & p_{32}^{(3)} \\
p_{33}^{(1)} & p_{33}^{(2)} & p_{33}^{(3)}
\end{array}$$