Übungen zu Einführung in die Numerische Mathematik (V2E2)

Sommersemester 2016

Prof. Dr. Martin Rumpf — Pascal Huber — Sascha Tölkes

Übungsblatt 6 — Abgabe: 07.06.2016

Aufgabe 19 (Tensorprodukt-Bézierpolynome) — 4 Punkte

Es bezeichne $B_i^n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ das i-te Bernsteinpolynom vom Grad n. Auf dem geschlossenen Einheitsquadrat $[0,1]^2$ definieren wir die Tensorprodukt-Bézierpolynome

$$P(x,y) = \sum_{i,j=0}^{n} b_{i,j} B_i^n(x) B_j^n(y) \quad \text{mit} \quad b_{i,j} \in \mathbb{R} \quad \text{für} \quad 0 \leq i,j \leq n.$$

Zeigen Sie:

(i) $\{B_i^n(x)B_j^n(y)\}_{i,j=0,\dots,n}$ ist eine nichtnegative Zerlegung der Eins auf $[0,1]^2$.

(ii) Für die partiellen Polynome

$$b_{i,j}^{k,l}(x,y) = \sum_{r=0}^{k} \sum_{q=0}^{l} b_{i+r,j+q} B_r^k(x) B_q^l(y), \quad (0 \leq k,l \leq n),$$

mit $0 \leq i \leq n-k$ und $0 \leq j \leq n-l$ gilt das folgende De Casteljau-Schema:

$$\begin{aligned}
b_{i,j}^{0,0}(x,y) &= b_{i,j}, \\
b_{i,j}^{k,l}(x,y) &= b_{i,j}^{k-1,l-1}(x,y)(1-x)(1-y) + b_{i+1,j}^{k-1,l-1}(x,y)x(1-y) \\
&\quad + b_{i,j+1}^{k-1,l-1}(x,y)(1-x)y + b_{i+1,j+1}^{k-1,l-1}(x,y)xy, \\
b_{0,0}^{n,n}(x,y) &= P(x).
\end{aligned}$$

(iii) Skizzieren Sie den daraus hervorgehenden Berechnungsalgorithmus für $P(\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$ im Fall $n = 3$ an einem Beispiel grafisch.

Lösung

(i) Aus dem univariaten Fall:

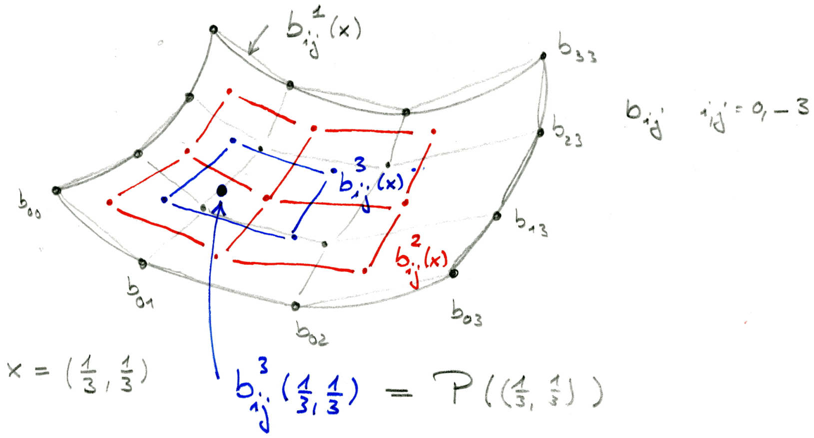
- $B_i^n(x)B_i^n(y) \geq 0$ für alle $x \in [0,1]^2$.

- $\sum_{i=0}^{n} B_i^n(x) \underbrace{\left(\sum_{j=0}^{n} B_j^n(y)\right)}_{=1} B_i^n(y) = \sum_{i=0}^{n} B_i^n(x) = 1.$

(ii) Wegen der Rekursion für Bernsteinpolynome $B_r^k(t) = (1-t)B_r^{k-1}(t) + tB_{r-1}^{k-1}(t)$ und $B_j^n = 0$ für $j \notin \{0, \dots, n\}$ erhält man das Schema durch geeinete Indexmanipulation:

$$\begin{aligned}
b_{ij}^{kl}(x,y) &= \sum_{r=0}^{k}\sum_{q=0}^{l} b_{i+r,j+q}\Big[(1-x)B_r^{k-1}(x)\left((1-y)B_q^{l-1}(y) + yB_{q-1}^{l-1}(y)\right) \\
&\qquad\qquad +xB_{r-1}^{k-1}(x)\left((1-y)B_q^{l-1}(y) + yB_{q-1}^{l-1}(y)\right)\Big] \\
p &= \sum_{r=0}^{k-1}\sum_{q=0}^{l-1} [(1-x)(1-y)b_{i+r,j+q} + (1-x)yb_{i+r,j+q+1} \\
&\qquad\qquad +x(1-y)b_{i+r+1,j+q} + xyb_{i+r+1,j+q+1}]\, B_r^{k-1}(x)B_q^{l-1}(y) \\
&= b_{ij}^{k-1,l-1}(x,y)(1-x)(1-y) + b_{i+1,j}^{k-1,l-1}(x,y)x(1-y) \\
&\quad + b_{i,j+1}^{k-1,l-1}(x,y)(1-x)y + b_{i+1,j+1}^{k-1,l-1}(x,y)xy
\end{aligned}$$

(iii) Wir bezeichnen $b_{i,j}^{k,k}$ mit $b_{i,j}^{k}$. Analog zum univariaten Fall (statt linien betrachten wir nun viereckige Patches). Geometrisch:



Aufgabe 20 (De Casteljau-Schema) **4 Punkte**

Betrachten Sie das Polynom $P(x,y) = (1-x)x(1-y)y$ auf $[0,1]^2$. Definieren Sie die Bézierpunkte $\{b_{i,j}\}_{i,j=0,\dots,3}$ für ein Bézierpolynom aus $\mathcal{P}^3 \otimes \mathcal{P}^3$. Berechnen Sie $P(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ mit dem De Casteljau-Schema (siehe Aufgabe 19).

Lösung

zur Berechnung der Bézierpunkte betrachte man Schnitte von P als eindimensionale Bézierkurven:

$$P_{1,2}(x) = (1-x)x$$

Offenbar ist $P_{1,2}(0) = b_0 = 0$ und $P_{1,2}(1) = b_3 = 0$. Da die Tangenten an die Endpunkte der Kurve entlang des Kontrollpolygons verlaufen gilt:

$$\begin{aligned} P'_{1,2}(0) = 1 = 3(b_1 - b_0) \quad &\Rightarrow \quad b_1 = \frac{1}{3} \\ P'_{1,2}(1) = -1 = 3(b_3 - b_2) \quad &\Rightarrow \quad b_2 = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

Wegen des Tensorproduktansatzes ergeben sich die Bézierpunkte der Fläche als Produkte der errechneten eindimensionalen Bézierpunkte:

$$(b_{i,j})_{0 \le i,j < 3} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} & 0 \\ 0 & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

und nach dem De Casteljau-Schema ergibt sich für $P(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$:

$$\begin{array}{ccccccc} \frac{1}{36} & \frac{1}{18} & \frac{1}{36} & & & & \\ & & & \frac{1}{16} & \frac{1}{16} & & \\ \frac{1}{18} & \frac{1}{9} & \frac{1}{18} & & & \frac{1}{16} & \\ & & & \frac{1}{16} & \frac{1}{16} & & \\ \frac{1}{36} & \frac{1}{18} & \frac{1}{36} & & & & \end{array}$$

Aufgabe 21 (Integration von Bézierpolynomen) **4 Punkte**

Beweisen Sie, dass für das Bézierpolynom $P(t) = \sum_{i=0}^{n} b_i B_i^n(t)$ mit $b_i \in \mathbb{R}$ gilt

$$\int_0^1 P(t)\,dt = \frac{1}{n+1}\left(\sum_{i=0}^{n} b_i\right).$$

Lösung

Es gilt:

$$\begin{aligned}
\int_0^1 B_i^n(t)\,dt &= \int_0^1 \binom{n}{i}(1-t)^{n-i}t^i\,dt \\
&= \binom{n}{i}(1-t)^{n-i}\frac{t^{i+1}}{i+1}\bigg|_{t=0}^{t=1} + \int_0^1 \binom{n}{i}(n-i)(1-t)^{n-i-1}\frac{t^{i+1}}{i+1}\,dt.
\end{aligned}$$

Der erste Summand ist dabei Null, da ein Faktor Null ist, wenn $i \neq n$. Weiter gilt

$$\int_0^1 \binom{n}{i+1}(1-t)^{n-(i+1)}t^{i+1}\,dt = \int_0^1 B_{i+1}^n(t)\,dt.$$

Mehrfaches Anwenden ergibt

$$\int_0^1 B_i^n(t)\,dt = \int_0^1 B_j^n(t)\,dt.$$

Insbesondere erhalten wir

$$\begin{aligned}
\int_0^1 B_i^n(t)\,dt &= \int_0^1 B_n^n(t)\,dt \\
&= \int_0^1 \binom{n}{n}(1-t)^{n-n}t^n\,dt \\
&= \int_0^1 t^n\,dt = \frac{1}{n+1}t^{n+1}\bigg|_{t=0}^{t=1} = \frac{1}{n+1}
\end{aligned}$$

Damit erhält man

$$\int_0^1 \sum_{i=0}^{n} b_i B_i^n(t)\,dt = \sum_{i=0}^{n} b_i \frac{1}{n+1} = \frac{1}{n+1}\sum_{i=0}^{n} b_i.$$

Programmieraufgabe 3 (Bézierflächen)

Zeichnen Sie eine Fläche im $\mathbb{R}^3$, die durch vier gegebene kubische Tensorprodukt-Bézier-Patches beschrieben wird. Approximieren Sie jeden Patch z. B. durch 10×10 Vierecke.
Die Koordinaten der Kontrollpunkte für die vier Bézier-Patches können Sie einer Textdatei auf der Webseite entnehmen.

`http://numod.ins.uni-bonn.de/teaching/ss16/numerik/`

Dort finden Sie auch Hinweise, wie sie Ihr Ergebnis darstellen können.
Hinweis: Seien $p_{ij} \in \mathbb{R}^3$ für $i, j = 0, \ldots 3$ die Kontrollpunkte eines Patches. Dann hat die Datei das folgende Format:

$$\begin{array}{lll}
p_{00}^{(1)} & p_{00}^{(2)} & p_{00}^{(3)} \\
p_{01}^{(1)} & p_{01}^{(2)} & p_{01}^{(3)} \\
p_{02}^{(1)} & p_{02}^{(2)} & p_{02}^{(3)} \\
p_{03}^{(1)} & p_{03}^{(2)} & p_{03}^{(3)} \\
\\
p_{10}^{(1)} & p_{10}^{(2)} & p_{10}^{(3)} \\
p_{11}^{(1)} & p_{11}^{(2)} & p_{11}^{(3)} \\
p_{12}^{(1)} & p_{12}^{(2)} & p_{12}^{(3)} \\
p_{13}^{(1)} & p_{13}^{(2)} & p_{13}^{(3)} \\
\\
p_{20}^{(1)} & p_{20}^{(2)} & p_{20}^{(3)} \\
p_{21}^{(1)} & p_{21}^{(2)} & p_{21}^{(3)} \\
p_{22}^{(1)} & p_{22}^{(2)} & p_{22}^{(3)} \\
p_{23}^{(1)} & p_{23}^{(2)} & p_{23}^{(3)} \\
\\
p_{30}^{(1)} & p_{30}^{(2)} & p_{30}^{(3)} \\
p_{31}^{(1)} & p_{31}^{(2)} & p_{31}^{(3)} \\
p_{32}^{(1)} & p_{32}^{(2)} & p_{32}^{(3)} \\
p_{33}^{(1)} & p_{33}^{(2)} & p_{33}^{(3)}
\end{array}$$