Institut für Numerische Simulation
Rheinische Friedrich-Wilhelms-Universität Bonn

universitätbonn

Übungen zu Einführung in die Numerische Mathematik (V2E2)

Sommersemester 2016

Prof. Dr. Martin Rumpf — Pascal Huber — Sascha Tölkes

Übungsblatt 7 — Abgabe: 14.06.2016

Aufgabe 22 (Greensche Funktion) — 4 Punkte

Gegeben sei die Greensche Funktion

$$G\colon \mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R},\quad G(x,y)=\frac{1}{2}[(1-x)|y|+x|y-1|-|x-y|].$$

Zeigen Sie, dass die Funktion

$$u(x)=\int_0^1 G(x,y)f(y)\,\mathrm{d}y+g(x)$$

mit $f\in C^2(\mathbb{R})$, $f(y)=0$ für alle $y\notin(0,1)$, $g(x)=g_0+x(g_1-g_0)$ und $g_0,g_1\in\mathbb{R}$ das folgende Randwertproblem löst:

$$\begin{cases} -u''=f, & \text{in } (0,1),\\ u(0)=g_0, & \\ u(1)=g_1. & \end{cases}$$

Lösung

Wir berechnen zunächst $u(0)$ und $u(1)$. Man überzeugt sich leicht davon, dass $G(0,y)=0$ und $G(1,y)=0$ für alle $y\in\mathbb{R}$ gilt. Also erhält man mit $g(0)=g_0$ und $g(1)=g_1$

$$\begin{aligned} u(0)&=\int_0^1 G(0,y)f(y)\,dy+g(0)=0+g_0=g_0,\\ u(1)&=\int_0^1 G(1,y)f(y)\,dy+g(1)=0+g_1=g_1. \end{aligned}$$

Setzt man nun den Ausdruck der Greenschen Funktion in die Definition von u ein, bekommt man

$$u(x)=\frac{(1-x)}{2}\int_0^1|y|f(y)\,dy+\frac{x}{2}\int_0^1|y-1|f(y)\,dy-\int_{\mathbb{R}}\frac{|y|}{2}f(x-y)\,dy+g(x).$$

Hierbei haben wir beim letzten Term benutzt, dass f kompakten Träger hat und die Faltung auf $\mathbb{R}$ kommutativ ist. Da die zweite Ableitung der ersten beiden Integrale verschwindet bleibt nur noch

$$-u''(x) = \partial_{xx} \int_{\mathbb{R}} \frac{|y|}{2} f(x-y)\,dy = \partial_{xx} \int_{-1}^{1} \frac{|y|}{2} f(x-y)\,dy \quad \text{für } x \in (0,1).$$

Ableitung und Integral können nun vertauscht werden, da f zweimal stetig differenzierbar und das Integrationsgebiet beschränkt ist. Dies ergibt

$$-u''(x) = \int_{-1}^{1} \frac{|y|}{2} f''(x-y)\,dy = \int_{0}^{1} \frac{y}{2} f''(x-y)\,dy - \int_{-1}^{0} \frac{y}{2} f''(x-y)\,dy.$$

Nun integrieren wir einmal partiell und rechnen das Integral aus

$$\begin{aligned}
-u''(x) &= \frac{1}{2}\left(\left[y f'(x-y) \right]_0^1 + \int_0^1 f'(x-y)\,dy + \left[y f'(x-y) \right]_{-1}^0 - \int_{-1}^0 f'(x-y)\,dy \right) \\
&= \frac{1}{2}\left(-f'(x-1) - f'(x+1) - (f(x-1) - f(x)) + (f(x) - f(x+1)) \right) \\
&= f(x),
\end{aligned}$$

wobei im letzten Schritt die Terme $f'(x-1), f'(x+1), f(x-1)$ und $f(x+1)$ wegen $f|_{\mathbb{R}\setminus(0,1)} \equiv 0$ verschwinden.

Aufgabe 23 (Interpolationsfehler im eindimensionalen Fall) — 4 Punkte

Man unterteile das geschlossene Einheitsinterval $[0,1]$ in $N+1 = \frac{1}{h}$ äquidistante Teilintervalle $I_i = [(i-1)h, ih]$ und betrachte den Raum der quadratischen stückweise Polynome

$$V_h := \left\{ v_h \in C^0[0,1] \colon v_h|_{I_i} \in \mathcal{P}_2 \text{ für alle } i \text{ und } v_h(0) = v_h(1) = 0 \right\}.$$

Für eine Funktion $u \in C^2[0,1]$ mit $u(0) = u(1) = 0$ und $u''' \in L^2(0,1)$ bezeichne $\mathcal{I}_h u \in V_h$ die Interpolierende. Die Interpolation sei an den Stellen ih und weiteren äquidistanten Zwischenstellen (jeweils eine für jedes Teilintervall) durchgeführt. Beweisen Sie die Interpolationsabschätzung

$$\|u' - (\mathcal{I}_h u)'\|_{L^2(0,1)} \leq C h^2 \|u'''\|_{L^2(0,1)}.$$

Hinweis: Betrachten Sie für den Beweis die Funktion $v = u - \mathcal{I}_h u$ und benutzen Sie den Mittelwertsatz. Leiten sie daraus Abschätzungen für $v''(x)$ und $v'(x)$ in Abhängigkeit von $\|v'''\|_{L^2(0,1)}$ her.

Lösung

Es sei $v = u - \mathcal{I}_h u$. Desweiteren bezeichnen a_i, b_i, c_i die Interpolationspunkte für ein gegebenes I_i, (d.h. $a_i = ih$, $c_i = (i+1)h$ und $b_i = (i+c)h$ mit $c \in (0,1)$). Aus der Definition der Interpolierenden folgt $v(a_i) = v(b_i) = v(c_i) = 0$. Also erhalten wir mit dem Mittelwertsatz die Existenz von zwei Punkten $\xi_{i,1} \in (a_i, b_i)$ und $\xi_{i,2} \in (b_i, c_i)$, sodass

$$v'(\xi_{i,1}) = v'(\xi_{i,2}) = 0.$$

Wiederholt man das Argument folgt die Existenz eines Punktes $\eta_i \in (\xi_{i,1}, \xi_{i,2})$ mit

$$v''(\eta_i) = 0.$$

Also gilt für $x \in I_i$

$$v''(x) = \int_{\eta_i}^{x} v'''(y)\,dy = \int_{\eta_i}^{x} u'''(y)\,dy, \quad \text{da } (\mathcal{I}_h u)''' = 0.$$

Mit der Cauchy-Schwarz-Ungleichung erhalten wir

$$|v''(x)| \leq \int_{\eta_i}^{x} 1 \cdot |u'''(y)|\,dy \leq \sqrt{|x-\eta_i|} \left(\int_{\eta_i}^{x} |u'''(y)|^2\,dy \right)^{1/2} \leq \sqrt{h}\|u'''\|_{L^2(I_i)}.$$

Dies liefert nun eine Abschätzung für die erste Ableitung von v:

$$|v'(x)| \leq \int_{\xi_{i,1}}^{x} |v''(y)|\,dy \leq \int_{\eta_i}^{x} \sqrt{h}\|u'''\|_{L^2(I_i)}\,dy \leq h^{3/2}\|u'''\|_{L^2(I_i)}.$$

Nun benutzen wir die letzte Ungleichung um die L^2-Norm von $u' - (\mathcal{I}_h u)'$ abzuschätzen:

$$\begin{aligned} \|u' - (\mathcal{I}_h u)'\|^2_{L^2[0,1]} &\leq \sum_i \int_{I_i} \left(h^{3/2}\|u'''\|_{L^2(I_i)} \right)^2\,dy \\ &= \sum_i h^4 \|u'''\|^2_{L^2(I_i)} \\ &= h^4 \|u'''\|^2_{L^2[0,1]}. \end{aligned}$$

Aufgabe 24 (Rotation eines Vektorfeldes) **4 Punkte**

Es sei $\Omega \subset\subset \mathbb{R}^3$ mit glattem Rand und n die äußere Normale an $\partial\Omega$. Man zeige folgende Aussagen:

(i) Für $u \in C^2(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^3)$

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot} u = \operatorname{grad}\operatorname{div} u - \Delta u$$

insbesondere gilt $\operatorname{rot}\operatorname{rot} u = -\Delta u$, falls u divergenzfrei ist.

(ii) Für $u, v \in C^1(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^3)$ gilt

$$\int_\Omega (\operatorname{rot} u) v = \int_\Omega u (\operatorname{rot} v),$$

falls u, v, n linear abhängig auf $\partial\Omega$ sind, insbesondere falls $u \times n = 0$ auf $\partial\Omega$.

Lösung

(i) Es gilt

$$\operatorname{rot} u = \begin{pmatrix} \partial_2 u_3 - \partial_3 u_2 \\ \partial_3 u_1 - \partial_1 u_3 \\ \partial_1 u_2 - \partial_2 u_1 \end{pmatrix}$$

und

$$\begin{aligned} (\nabla \operatorname{div} u)_i &= \partial_i (\operatorname{div} u) = \partial_i \left(\partial_1 u_1 + \partial_2 u_2 + \partial_3 u_3\right) \\ (\Delta u)_i &= \Delta u_i = \partial_{11} u_i + \partial_{22} u_i + \partial_{33} u_i \,. \end{aligned}$$

Damit erhält man

$$\begin{aligned} (\operatorname{rot} \operatorname{rot} u)_1 &= \partial_2(\partial_1 u_2 - \partial_2 u_1) - \partial_2(\partial_3 u_1 - \partial_1 u_3) \\ &= \partial_{21} u_2 + \partial_{31} u_3 - \partial_{22} u_1 - \partial_{33} u_1 \\ &= (\nabla \operatorname{div} u)_1 - (\Delta u)_1 \end{aligned}$$

und analoge Gleichungen für die anderen Komponenten.

(ii) Es gilt

$$\operatorname{rot} u \cdot v = v_1(\partial_2 u_3 - \partial_3 u_2) + v_2(\partial_3 u_1 - \partial_1 u_3) + v_3(\partial_1 u_2 - \partial_2 u_1) \,.$$

Mit dem Satz von Gauß erhält man

$$\int_\Omega v_r(\partial_j u_i - \partial_i u_j) \, \mathrm{d}x = \int_{\partial\Omega} v_r(n_i u_j - n_j u_i) \, \mathrm{d}a - \int_\Omega u_j \partial_i v_r - u_i \partial_j v_r \, \mathrm{d}x \,.$$

Es gilt also

$$\begin{aligned} \int_\Omega \operatorname{rot} u \cdot v &= \int_{\partial\Omega} v \cdot (n \times u) \, \mathrm{d}a \\ &\quad - \int_\Omega u_3 \partial_2 v_1 - u_2 \partial_3 v_1 + u_1 \partial_3 v_2 - u_3 \partial_1 v_2 + u_2 \partial_1 v_3 - u_1 \partial_2 v_3 \, \mathrm{d}x \\ &= \int_{\partial\Omega} v \cdot (n \times u) \, \mathrm{d}a + \int_\Omega u \cdot \operatorname{rot} v \, \mathrm{d}x \,. \end{aligned}$$

Falls u, v und n auf $\partial\Omega$ linear abhängig sind, so gilt entweder $n \times u = 0$ oder $v \in \operatorname{span}(n, u)$. In beiden Fällen gilt $v \cdot (n \times u) = 0$ und das Randintegral verschwindet.

Aufgabe 25 (Elliptisches Randwertproblem auf einem Ring) 4 Punkte

(i) Zeigen Sie, dass $\Delta_x \ln(r) = 0$, wobei $r = \|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$ und $x \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$.

(ii) Gegeben sei der Ring $\Omega = (B_2(0) \setminus B_{\frac{1}{2}}(0)) \subset \mathbb{R}^2$. Bestimmen Sie die schwache Lösung des Randwertproblems

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(a\nabla u) = 0, & \text{auf } B_2(0) \setminus B_{\frac{1}{2}}(0), \\ u = 1, & \text{auf } \partial B_{\frac{1}{2}}(0), \\ u = 0, & \text{auf } \partial B_2(0), \end{cases}$$

mit der Funktion $a \in L^\infty(\mathbb{R}^2)$ definiert durch

$$a(x) = \begin{cases} 1, & \|x\| \le 1, \\ 2, & \|x\| > 1. \end{cases}$$

Lösung

Siehe Blatt 8.