Institut für Numerische Simulation
Rheinische Friedrich-Wilhelms-Universität Bonn

universitätbonn

Übungen zu Einführung in die Numerische Mathematik (V2E2)

Sommersemester 2016

Prof. Dr. Martin Rumpf — Pascal Huber — Sascha Tölkes

Übungsblatt 8 — Abgabe: 21.06.2016

Aufgabe 25 (Elliptisches Randwertproblem auf einem Ring) — 4 Punkte

(i) Zeigen Sie, dass $\Delta_x \ln(r) = 0$, wobei $r = \|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$ und $x \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$.

(ii) Gegeben sei der Ring $\Omega = (B_2(0) \setminus B_{\frac{1}{2}}(0)) \subset \mathbb{R}^2$. Bestimmen Sie die schwache Lösung des Randwertproblems

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(a\nabla u) = 0, & \text{auf } B_2(0) \setminus B_{\frac{1}{2}}(0), \\ u = 1, & \text{auf } \partial B_{\frac{1}{2}}(0), \\ u = 0, & \text{auf } \partial B_2(0), \end{cases}$$

mit der Funktion $a \in L^\infty(\mathbb{R}^2)$ definiert durch

$$a(x) = \begin{cases} 1, & \|x\| \leq 1, \\ 2, & \|x\| > 1. \end{cases}$$

Aufgabe 26 (Faltung) — 4 Punkte

Seien $\varphi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und $\psi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ durch $\varphi = \chi_{[-1,1]}$ bzw. durch $\psi = \chi_{[-1,1]^2}$ definiert. Desweiteren, seien $\varphi_\varepsilon(x) = \frac{1}{2\varepsilon}\varphi(\frac{x}{\varepsilon})$ und $\psi_\varepsilon(x) = \frac{1}{(2\varepsilon)^2}\psi(\frac{x}{\varepsilon})$.

(i) Bestimmen Sie $u_\varepsilon := \varphi_\varepsilon * u$ mit $u = \chi_{[-1,1]}$ und zeigen Sie, dass $u_\varepsilon \in C^{0,1}(\mathbb{R})$.

(ii) Bestimmen Sie $v_\varepsilon := \varphi_\varepsilon * v$ mit $v(x) = |x|$ und zeigen Sie, dass $v_\varepsilon \in C^{1,1}(\mathbb{R})$.

(iii) Bestimmen Sie $w_\varepsilon := \psi_\varepsilon * \chi_{[-1,1]^2}$. *Hinweis: Es genügt, die (entscheidenden) Niveaulinien von w_ε zu skizzieren und die Werte darauf anzugeben.*

Aufgabe 27 **(Regularität der Hermite-Interpolation)** **4 Punkte**

Man unterteile $[0,1]$ in $N = \frac{1}{h}$ äquidistante Teilintervalle $I_i = [ih, (i+1)h]$ mit $i = 0, 1, \dots, N-1$. Für $f \in C^\infty([0,1])$ bezeichne $\mathcal{I}_h f$ die stückweise kubische Hermite-Interpolation von f. Zeigen Sie, dass $\mathcal{I}_h f \in H^{2,p}((0,1))$ für alle $p \geq 1$ gilt.

Aufgabe 28 **(Poincaré-Ungleichung)** **4 Punkte**

Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ eine zusammenhängende, endliche Vereinigung von Quadern und Γ_D eine Quaderseite enthalten in $\partial\Omega$. Zeigen Sie, dass für $u \in H^{1,2}(\Omega)$ mit $u = 0$ auf Γ_D folgende Poincaré-Ungleichung gilt

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} \leq C(\Omega, \Gamma_D)\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}.$$

Hinweise:

(i) Rufen Sie sich den Beweis für einen einzelnen Quader in Erinnerung (Tipp: Verwenden Sie den Hauptsatz der Integralrechnung).

(ii) Versuchen Sie diesen Beweis an die Voraussetzungen der Aufgabe anzupassen.