Institut für Numerische Simulation
Rheinische Friedrich-Wilhelms-Universität Bonn

universitätbonn

Übungen zu Einführung in die Numerische Mathematik (V2E2)

Sommersemester 2016

Prof. Dr. Martin Rumpf — Pascal Huber — Sascha Tölkes

Übungsblatt 8 — Abgabe: 21.06.2016

Aufgabe 25 (Elliptisches Randwertproblem auf einem Ring) — 4 Punkte

(i) Zeigen Sie, dass $\Delta_x \ln(r) = 0$, wobei $r = \|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$ und $x \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$.

(ii) Gegeben sei der Ring $\Omega = (B_2(0) \setminus B_{\frac{1}{2}}(0)) \subset \mathbb{R}^2$. Bestimmen Sie die schwache Lösung des Randwertproblems

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(a\nabla u) = 0, & \text{auf } B_2(0) \setminus B_{\frac{1}{2}}(0), \\ u = 1, & \text{auf } \partial B_{\frac{1}{2}}(0), \\ u = 0, & \text{auf } \partial B_2(0), \end{cases}$$

mit der Funktion $a \in L^\infty(\mathbb{R}^2)$ definiert durch

$$a(x) = \begin{cases} 1, & \|x\| \le 1, \\ 2, & \|x\| > 1. \end{cases}$$

Lösung

(i) Berechne

$$\partial_i \|x\| = \frac{1}{2}\left(x_1^2 + \cdots + x_n^2\right)^{-\frac{1}{2}} 2x_i = \frac{x_i}{\|x\|}$$

$$\partial_i \ln(r) = \frac{x_i}{r^2}$$

Man erhält

$$\partial_{ii} \ln(r) = -\frac{x_i^2}{r^4} + \frac{1}{r^2} - \frac{x_i^2}{r^4} = -2\frac{x_i^2}{r^4} + \frac{1}{r^2}$$

und

$$\Delta_x \ln(r) = -\frac{2}{r^2} + \frac{2}{r^2} = 0\,.$$

(ii) Im vorigen Aufgabenteil wurde gezeigt, dass $c_1 \ln(|\mathbf{x}\|) + c_2$ harmonisch ist. Damit lässt sich die PDE jeweils auf $B_2 \setminus B_1$ und $B_1 \setminus B_{\frac{1}{2}}$, wobei die Randbedingung auf $B_1(0)$ ein freier Parameter ist.

- auf $B_1 \setminus B_{\frac{1}{2}}$:

$$\begin{aligned} u_1 &= c_1 \ln(\|x\|) + c_2 \\ u_1(1) &= c_1 \cdot \ln(1) + c_2 = s \Leftrightarrow c_2 = s \\ u_1\left(\frac{1}{2}\right) &= c_1 \ln\left(\frac{1}{2}\right) + s = 1 \Leftrightarrow c_1 = \frac{1-s}{\ln\left(\frac{1}{2}\right)} = -\frac{1-s}{\ln(2)} \end{aligned}$$

- auf $B_2 \setminus B_1$:

$$\begin{aligned} u_2 &= c_3 \ln(\|x\|) + c_4 \\ u_2(1) &= c_3 \ln(1) + c_4 = s \Leftrightarrow c_4 = s \\ u_2(2) &= c_3 \ln(2) + s = 0 \Leftrightarrow c_3 = -\frac{s}{\ln(2)} \end{aligned}$$

Die schwache Formulierung des Randwertproblems lautet nun: Für $g \in H^1(\Omega)$ mit $g|_{\partial B_{1/2}(0)} = 1$ und $g_{\partial B_2(0)} = 0$, finde $u \in H^1(\Omega)$ mit $u = u_0 + g$, wobei $u_0 \in H_0^1(\Omega)$ die Gleichung

$$\int_\Omega a \nabla u_0 \cdot \nabla \varphi \, dx = -\int_\Omega a \nabla g \cdot \nabla \varphi \, dx, \quad \text{für alle } \varphi \in H_0^1(\Omega),$$

löst.
Für ein beliebiges $g \in H^1(\Omega)$ wie beschrieben, definieren wir $u_0 := u - g$, wobei $u \in H^1(\Omega)$ stückweise durch u_1 und u_2 definiert ist. Mit der schwachen Formulierung gilt also für $\varphi \in H_0^1(\Omega)$:

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{B_2 \setminus B_{\frac{1}{2}}} a \nabla u_0 \cdot \nabla \varphi \, \mathrm{d}x + \int_{B_2 \setminus B_{\frac{1}{2}}} a \nabla g \cdot \nabla \varphi \, \mathrm{d}x \\ &= \int_{B_2 \setminus B_{\frac{1}{2}}} a \nabla u \cdot \nabla \varphi \, \mathrm{d}x \\ &= \int_{B_2 \setminus B_1} 2 \nabla u_2 \cdot \nabla \varphi \, \mathrm{d}x + \int_{B_1 \setminus B_{\frac{1}{2}}} \nabla u_1 \cdot \nabla \varphi \, \mathrm{d}x \\ &= \int_{\partial B_1} 2(\nabla u_2 \cdot (-x))\varphi \, \mathrm{d}x + \int_{\partial B_1} (\nabla u_1 \cdot x)\varphi \, \mathrm{d}x \\ &= \int_{\partial B_1} \varphi x \cdot (\nabla(u_1 - 2u_2)) \, \mathrm{d}x \\ \Leftrightarrow & \frac{s-1}{\ln(2)} + 2\frac{s}{\ln(2)} = 0 \Leftrightarrow s = \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

Man erhält die Lösung

$$u = \begin{cases} -\frac{2}{3\ln(2)} \ln(\|x\|) + \frac{1}{3} & x \in B_1 \setminus B_{\frac{1}{2}} \\ -\frac{1}{3\ln(2)} \ln(\|x\|) + \frac{1}{3} & x \in B_2 \setminus B_1 . \end{cases}$$

Aufgabe 26 (Faltung) **4 Punkte**

Seien $\varphi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und $\psi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ durch $\varphi = \chi_{[-1,1]}$ bzw. durch $\psi = \chi_{[-1,1]^2}$ definiert. Desweiteren, seien $\varphi_\varepsilon(x) = \frac{1}{2\varepsilon}\varphi(\frac{x}{\varepsilon})$ und $\psi_\varepsilon(x) = \frac{1}{(2\varepsilon)^2}\psi(\frac{x}{\varepsilon})$.

(i) Bestimmen Sie $u_\varepsilon := \varphi_\varepsilon * u$ mit $u = \chi_{[-1,1]}$ und zeigen Sie, dass $u_\varepsilon \in C^{0,1}(\mathbb{R})$.

(ii) Bestimmen Sie $v_\varepsilon := \varphi_\varepsilon * v$ mit $v(x) = |x|$ und zeigen Sie, dass $v_\varepsilon \in C^{1,1}(\mathbb{R})$.

(iii) Bestimmen Sie $w_\varepsilon := \psi_\varepsilon * \chi_{[-1,1]^2}$. *Hinweis: Es genügt, die (entscheidenden) Niveaulinien von w_ε zu skizzieren und die Werte darauf anzugeben.*

Lösung

(i) Es gilt

$$
\begin{aligned}
u_\varepsilon(x) &= (\varphi_\varepsilon * \chi_{[-1,1]})(x) = \int_{\mathbb{R}} \varphi_\varepsilon(y)\chi_{[-1,1]}(x-y)\,dy \\
&= \int_{[-\varepsilon,\varepsilon]} \varphi_\varepsilon(y)\chi_{[-1,1]}(x-y)\,dy \\
&= \int_{[-\varepsilon,\varepsilon]\cap[x-1,x+1]} \frac{1}{2\varepsilon}\,dy \\
&= \begin{cases} \frac{1+x+\varepsilon}{2\varepsilon}, & \text{für } x \in (-1-\varepsilon, -1+\varepsilon) \\ 1, & \text{for } x \in [-1+\varepsilon, 1-\varepsilon] \\ \frac{1-x+\varepsilon}{2\varepsilon}, & \text{für } x \in (1-\varepsilon, 1+\varepsilon) \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}
\end{aligned}
$$

Die resultierende Funktion ist also stückweise linear. Wir zeigen die Lipschitzstetigkeit exemplarisch bei $x_0 = 1+\varepsilon$. Seien dazu $h_1, h_2 > 0$, dann gilt für $x = 1+\varepsilon-h_1$ und $y = 1+\varepsilon+h_2$:

$$
\frac{|u_\varepsilon(x) - u_\varepsilon(y)|}{|x-y|} = \frac{|\frac{-\varepsilon-h_1+\varepsilon}{2\varepsilon}|}{h_1+h_2} \le \frac{|\frac{h_1}{2\varepsilon}|}{h_1} \le \frac{1}{2\varepsilon}.
$$

(ii) Es gilt

$$
\begin{aligned}
v_\varepsilon(x) &= (\varphi_\varepsilon * u)(x) = \frac{1}{2\varepsilon}\int_{\mathbb{R}} \chi_{[-1,1]}(\frac{x-y}{\varepsilon})|y|\,dy \\
&= \frac{1}{2\varepsilon}\int_{[x-\varepsilon,x+\varepsilon]} |y|\,dy \\
&= \begin{cases} -x, & \text{für } x \le -\varepsilon, \\ \frac{1}{2\varepsilon}(x^2+\varepsilon^2), & \text{für } x \in (-\epsilon, \epsilon), \\ x, & \text{für } x \ge \varepsilon. \end{cases}
\end{aligned}
$$

Die Funktion v_ε kann stückweise differenziert mit

$$v_\varepsilon'(x) = \begin{cases} -1, & \text{für } x \le -\varepsilon, \\ \frac{x}{\varepsilon}, & \text{für } x \in (-\varepsilon, \varepsilon), \\ 1, & \text{für } x \ge \varepsilon. \end{cases}$$

und die Ableitung ist stetig. Es bleibt also nur noch zu zeigen, dass v_ε' Lipschitz-stetig ist. Wir betrachten exemplarisch die Umgebung von $x_0 = \varepsilon$. Seien dazu $h_1, h_2 > 0$, dann gilt für $x = \varepsilon - h_1$ und $y = \varepsilon + h_2$:

$$|v_\varepsilon'(x) - v_\varepsilon'(y)| = |1 - \frac{h_1}{\varepsilon} - 1| = |\frac{h_1}{\varepsilon}| \le \frac{1}{\varepsilon}|h_1 + h_2| = \frac{1}{\varepsilon}|x - y|.$$

(iii) Es gilt

$$\begin{aligned} w_\varepsilon(x) &= (\psi_\varepsilon * \chi_{[-1,1]^2})(x) = \frac{1}{4\varepsilon^2} \int_{\mathbb{R}^2} \chi_{[-1,1]^2}(\frac{x-y}{\varepsilon}) \chi_{[-1,1]^2}(y)\, dy \\ &= \frac{1}{4\varepsilon^2} \int_{[-1,1]} \chi_{[-\varepsilon,\varepsilon]^2}(x-y)\, dy \\ &= \frac{1}{4\varepsilon^2} \mathcal{L}^2\left(([x_1-\varepsilon, x_1+\varepsilon] \cap [-1,1]) \times ([x_2-\varepsilon, x_2+\varepsilon] \cap [-1,1])\right) \\ &= \frac{1}{4\varepsilon^2} \mathcal{L}^1([x_1-\varepsilon, x_1+\varepsilon] \cap [-1,1]) \cdot \mathcal{L}^1([x_1-\varepsilon, x_2+\varepsilon] \cap [-1,1]) \\ &= u_\varepsilon(x_1) u_\varepsilon(x_2). \end{aligned}$$

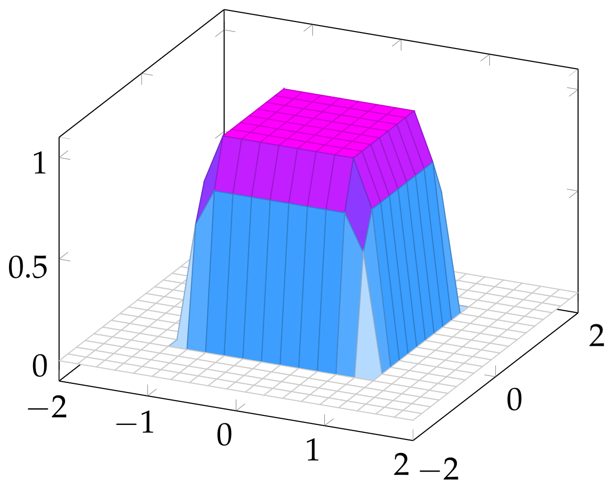

Abbildung 1: w_ε für $\varepsilon = 0.1$

Aufgabe 27 (Regularität der Hermite-Interpolation) 4 Punkte

Man unterteile $[0,1]$ in $N = \frac{1}{h}$ äquidistante Teilintervalle $I_i = [ih,(i+1)h]$ mit $i = 0,1,\ldots,N-1$. Für $f \in C^\infty([0,1])$ bezeichne $\mathcal{I}_h f$ die stückweise kubische Hermite-Interpolation von f. Zeigen Sie, dass $\mathcal{I}_h f \in H^{2,p}((0,1))$ für alle $p \geq 1$ gilt.

Lösung

Aus der Definition der Hermite-Interpolation folgt direkt, dass $\mathcal{I}_h f \in C^1([0,1])$. Insbesondere erfüllt die Funktion $v := \mathcal{I}_h f$

- $v \in C^0([0,1])$ und
- $v|_{I_i} \in C^1(\overset{\circ}{I_i})$ für alle $i = 0,\ldots,N-1$.

Da $\mathcal{I}_h f$ im starken Sinn (und damit auch schwach) differenzierbar ist und die Ableitung v beschränkt ist, reicht es zu zeigen, dass $v \in H^{1,p}((0,1))$. Sei dazu $\varphi \in C_0^\infty((0,1))$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
\int_{(0,1)} \varphi'(x)v(x)\,dx &= \sum_{i=0}^{N-1} \int_{I_i} \varphi'(x)v|_{I_i}(x)\,dx \\
&= \sum_{i=0}^{N-1} \left([\varphi(x)v_{I_i}(x)]_{ih}^{(i+1)h} - \int_{I_i} \varphi(x)v|'_{I_i}(x)\,dx \right) \\
&= \varphi(1)v(1) - \varphi(0)v(0) + \sum_{i=1}^{N-1} \left(v|_{I_{i-1}}(ih) - v|_{I_i}(ih) \right) - \int_{(0,1)} \varphi(x)v'(x)\,dx \\
&= 0 - 0 + 0 - \int_{(0,1)} \varphi(x)v'(x)\,dx = -\int_{(0,1)} \varphi(x)v'(x)\,dx.
\end{aligned}$$

Hierbei setzen wir $v' = v|'_{I_i}$ im Inneren von I_i und $v'(ih) = 0$ für alle i (die Wahl an den endlich vielen Stützstellen ist beliebig). Da das Interpolationpolynom ein stückweise kubisches Polynom ist, gilt damit $v' \in L^\infty([0,1])$, was wiederum $v' \in L^p([0,1])$ für alle $p \geq 1$ impliziert. Also ist v' ein schwache Ableitung von v im $H^{1,p}((0,1))$-Sinne und damit insgesamt $\mathcal{I}_h f \in H^{2,p}([0,1])$.

Aufgabe 28 (Poincaré-Ungleichung) 4 Punkte

Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ eine zusammenhängende, endliche Vereinigung von Quadern und Γ_D eine Quaderseite enthalten in $\partial\Omega$. Zeigen Sie, dass für $u \in H^{1,2}(\Omega)$ mit $u = 0$ auf Γ_D folgende Poincaré-Ungleichung gilt

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} \leq C(\Omega, \Gamma_D)\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}.$$

Hinweise:

(i) Rufen Sie sich den Beweis für einen einzelnen Quader in Erinnerung (Tipp: Verwenden Sie den Hauptsatz der Integralrechnung).

(ii) Versuchen Sie diesen Beweis an die Voraussetzungen der Aufgabe anzupassen.

Lösung

Die Hauptidee des Beweises ist, eine geeignete Kurvenschar zu finden, die das gesamte Integrationsgebiet Ω "abdeckt". Es bezeichne $Q_0 \subset \mathbb{R}^2$ denjenigen Quader, auf dessen Quaderseite Γ_D die Funktion u den Wert Null annimmt. Für den Moment nehmen wir an, dass Q_0 durch das Quadrat $[0, A]^2$ gegeben ist und dass $\Gamma_D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon 0 \leq x \leq A, y = A\}$.

Wir definieren nun rekursiv eine stückweise lineare Kurvenschar $(\gamma_a(t))_{t\in[0,1],a\in[0,A]}$.

- Zunächst betrachten wir nur den Quader Q_0. Wir definieren

$$\gamma_a(t) = \begin{cases} (a, A)^T + t(-a, 3a)^T, & \text{für } 0 \leq a < \frac{A}{3}, \\ (a, A)^T + t(2a - A, -A)^T, & \text{für } \frac{A}{3} \leq a \leq \frac{2A}{3}, \\ (a, A)^T + t(A - a, 3a - 3A)^T, & \text{für } \frac{2A}{3} < a \leq A. \end{cases}$$

  Man kann leicht nachprüfen, dass es für jeden Punkt (x, y) ein eindeutiges

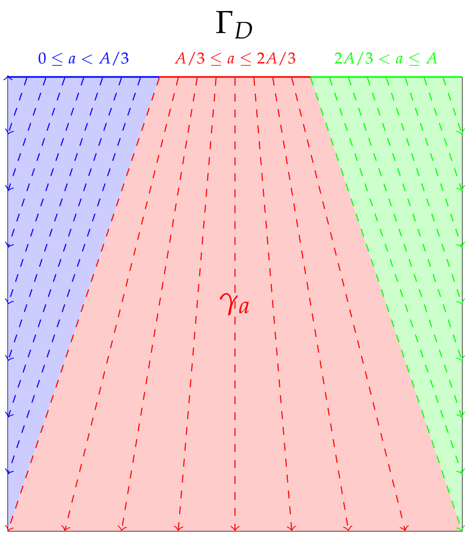

Abbildung 2: Skizze der Kurvenschar auf dem Quadrat $Q_0 = [0, A]^2$.

  Paar $(t, a) \in [0, 1] \times [0, A]$ gibt, sodass $\gamma_a(t) = (x, y)$. Desweiteren gilt für $0 \leq a < A/3$, dass $\gamma_a(1)$ auf der linken Kante $\{0\} \times [0, A]$, für $A/3 \leq a \leq 2A/3$ auf der unteren Kante $[0, A] \times \{0\}$ und für $2A/3 < a \leq A$ auf der rechten Kante $\{0\} \times [0, A]$ liegt (siehe Abbildung 2). Diese Konstruktion kann analog auch für allgemeine Quader durchgeführt werden.

- Um die Kurvenschar auf ganz Ω auszuweiten, machen wir die gleiche Konstruktion auf jedem angrenzenden Quader (dabei sind die Kurven ausgehend von der gemeinsamen Kante definiert). Dieses Argument kann iteriert werden, sodass wir schließlich (nach Umparametrisierung) eine Schar von stückweise affinen Kurven $(\gamma_a(t))_{t,a}$ erhalten, sodass für jeden Punkt $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ genau ein Paar $(t, a) \in [0, 1] \times [0, A]$ existiert mit $\gamma_a(t) = (x, y)$.

Um den Beweis abzuschließen, gehen wir ähnlich vor wie beim Beweis der Poincaré-Ungleichung auf Quadern. Zunächst bemerken wir, dass wegen der endlichen Anzahl an Quadern, Konstanten $C_1(\Omega), C_2(\Omega) > 0$ existieren, sodass

$$C_1(\Omega) \leq |\dot{\gamma}_a(t)| \leq C_2(\Omega) \quad \text{und} \quad C_1(\Omega) \leq |\partial_a \gamma_a(t)| \leq C_2(\Omega).$$

Aus dem Hauptsatz der Integralrechnung (für schwache Ableitungen) und der Cauchy-Schwarz-Ungleichung erhalten wir für $|u(\gamma_a(t))|^2$ die folgende Abschätzung für (fast alle t und a):

$$\begin{aligned}
|u(\gamma_a(t))|^2 &= |\int_0^t \nabla u(\gamma_a(s)) \cdot \dot{\gamma}_a(s)\, ds|^2 \\
&\leq \int_0^1 |\dot{\gamma}_a(s)|^2\, ds \int_0^1 |\nabla u(\gamma_a(s))|^2\, ds \\
&\leq C_2^2 \int_0^1 |\nabla u(\gamma_a(s))|^2\, ds.
\end{aligned}$$

Damit können wir schließlich die L^2-norm von u abschätzen. Mit dem Transformationssatz erhält man

$$\begin{aligned}
\int_\Omega |u(x)|^2\, dx &\leq \int_0^A \int_0^1 |u(\gamma_a(t))|^2\, 2|\dot{\gamma}_a(t)||\partial_a \gamma_a(t)|\, dt\, da \\
&\leq 2\, C_2^2 \int_0^A \int_0^1 \int_0^1 |\nabla u(\gamma_a(s))|^2\, ds |\dot{\gamma}_a(t)||\partial_a \gamma_a(t)|\, dt\, da \\
&\leq 2\, C_2^4 \int_0^A \int_0^1 |\nabla u(\gamma_a(s))|^2\, ds\, da \\
&\leq 2 \frac{C_2^4}{C_1^2} \int_0^A \int_0^1 |\nabla u(\gamma_a(s))|^2 |\dot{\gamma}_a(s)||\partial_a \gamma_a(s)|\, ds\, da \\
&= \frac{C_2^4}{C_1^2} \int_\Omega |\nabla u(x)|^2\, dx.
\end{aligned}$$

Bemerkung: Anstatt des Transformationssatzes kann auch die "coarea formula" verwendet werden. Diese verallgemeinert den Satz von Fubini und liefert somit ein direktes Analogon zum Beweis der Poincaré Ungleichung auf Quadern.