Institut für Numerische Simulation
Rheinische Friedrich-Wilhelms-Universität Bonn

universitätbonn

Übungen zu Einführung in die Numerische Mathematik (V2E2)

Sommersemester 2016

Prof. Dr. Martin Rumpf — Pascal Huber — Sascha Tölkes

Übungsblatt 9 — Abgabe: 28.06.2016

Aufgabe 29 (Elliptisches Randwertproblem auf einem Ring) — 4 Punkte

Es sei $\Omega \in \mathbb{R}^2$ eine zusammenhängende, endliche Vereinigung von Quadern und Γ_D eine Quaderseite, die in $\partial\Omega$ enthalten ist. Man betrachte das elliptische Randwertproblem

$$\begin{aligned} -\sum_{i,j=1}^{n} \partial_i(a_{ij}\partial_i u) + au &= f \quad \text{in } \Omega\,, \\ u &= 0 \quad \text{auf } \Gamma_D\,, \\ \nu_i a_{ij}\partial_j u &= 0 \quad \text{auf } \partial\Omega \setminus \Gamma_D\,, \end{aligned} \tag{1}$$

wobei $f \in L^2(\Omega)$ und a_{ij}, a messbar und beschänkt sind. Weiter gelte $a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \geq c_0|\xi|^2$ und $a(x) \geq -C > -\frac{c_0}{C_p}$ für $x \in \Omega$ und $\xi \in \mathbb{R}^n$ mit der Poincaré-Konstante C_p aus der folgenden Ungleichung:

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} \leq C_p(\Omega, \Gamma_D)\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)},$$

die für $u \in H^{1,2}(\Omega)$ mit $u = 0$ auf Γ_D erfüllt ist.
Man gebe eine schwache Formulierung des Problems (1) an und zeige die Existenz einer eindeutigen schwachen Lösung.

Aufgabe 30 (Äquivalenz von Normen auf einem Dreieck) — 4 Punkte

Es sei $T \subseteq \mathbb{R}^2$ ein Dreieck und P_1 der Raum der affinen Funktionen auf T. Zeigen Sie, dass die $L^\infty-$ und die L^2- Normen auf P_1 äquivalent sind, d.h.

$$\max_T |p| \leq C(T)\|p\|_{L^2(T)}$$

für $p \in P_1$, und geben Sie $C(T)$ an.
Hinweis: Verwenden Sie die Tatsache, dass die Kantenmittenintegration für quadratische Funktionen exakt ist.

Aufgabe 31 (Singularität am Übergang Dirichlet-Neumann Rand) 4 Punkte

Zeigen Sie,

(i) dass der Laplace-Operator in Polarkoordinaten die folgende Form hat:

$$\Delta u = \partial_r^2 u + \frac{1}{r^2}\partial_\varphi^2 u + \frac{1}{r}\partial_r u$$

(ii) dass die Lösung des Poisson-Problems

$$\begin{aligned} -\Delta u &= 0 \text{ in } \Omega\,, \\ u &= g \text{ auf } \partial\Omega \end{aligned}$$

mit $\Omega = \{(r\cos(\varphi), r\sin(\varphi)) \;:\; 0 < r < 1, 0 < \varphi < 2\pi\}$ und $g = r^{\frac{1}{2}}\sin(\frac{\varphi}{2})$ keine schwache Lösung des Problems

$$\begin{aligned} -\Delta u &= 0 \text{ in } B_1(0)\,, \\ u &= g \text{ auf } \partial B_1(0) \end{aligned}$$

ist.

Aufgabe 32 (Schwache Lösung durch Spiegelung) 4 Punkte

Sei $u \in H^{1,2}(\Omega)$ schwache Lösung zum Problem

$$\begin{aligned} -\Delta u &= f \text{ auf } \Omega\,, \\ u &= 0 \text{ auf } \partial\Omega \end{aligned}$$

mit $\Omega = [0,1]^2$ und $f \in L^2$. Man konstruiere durch Spiegelung eine schwache Lösung von

$$\begin{aligned} -\Delta u &= \widetilde{f} \text{ auf } [-1,1]^2\,, \\ u &= 0 \text{ auf } \partial([-1,1]^2) \end{aligned}$$

wobei $\widetilde{f}$ eine geeignete Funktion mit $\widetilde{f}_{|_{[0,1]^2}} = f$ ist.