Institut für Numerische Simulation
Rheinische Friedrich-Wilhelms-Universität Bonn

universitätbonn

Übungen zu Einführung in die Numerische Mathematik (V2E2)

Sommersemester 2016

Prof. Dr. Martin Rumpf — Pascal Huber — Sascha Tölkes

Übungsblatt 9 Abgabe: 28.06.2016

Aufgabe 29 (Elliptisches Randwertproblem auf einem Ring) 4 Punkte

Es sei $\Omega \in \mathbb{R}^2$ eine zusammenhängende, endliche Vereinigung von Quadern und Γ_D eine Quaderseite, die in $\partial\Omega$ enthalten ist. Man betrachte das elliptische Randwertproblem

$$
\begin{aligned}
-\sum_{i,j=1}^{n} \partial_i(a_{ij}\partial_i u) + au &= f \quad \text{in } \Omega\,, \\
u &= 0 \quad \text{auf } \Gamma_D\,, \\
\nu_i a_{ij}\partial_j u &= 0 \quad \text{auf } \partial\Omega \setminus \Gamma_D\,,
\end{aligned}
\tag{1}
$$

wobei $f \in L^2(\Omega)$ und a_{ij}, a messbar und beschänkt sind. Weiter gelte $a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \geq c_0|\xi|^2$ und $a(x) \geq -C > -\frac{c_0}{C_p}$ für $x \in \Omega$ und $\xi \in \mathbb{R}^n$ mit der Poincaré-Konstante C_p aus der folgenden Ungleichung:

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} \leq C_p(\Omega, \Gamma_D)\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)},$$

die für $u \in H^{1,2}(\Omega)$ mit $u = 0$ auf Γ_D erfüllt ist.
Man gebe eine schwache Formulierung des Problems (1) an und zeige die Existenz einer eindeutigen schwachen Lösung.

Lösung

Die schwache Formulierung des Problems (1) ist

$$
\begin{aligned}
&\int_\Omega -\sum_{i,j} \partial_i \left(a_{ij}\partial_j u\right) v + auv \,\mathrm{d}x = \int_\Omega fv \,\mathrm{d}x\,, \quad v \in \{g_{|\gamma_D} = 0 | g \in H^1\} \\
\Leftrightarrow \quad &\int_\Omega \sum_{i,j} a_{ij}\partial_j u \partial_i v + auv \,\mathrm{d}x = \int_\Omega fv \,\mathrm{d}x - \int_{\partial\Omega} \sum_{i,j} a_{ij}\partial_j uvr \,\mathrm{d}a\,.
\end{aligned}
$$

Der Randterm ist 0 auf Γ_D, da $v = 0$ auf Γ_D und nach Vorraussetzung ebenfalls 0 auf Γ_N.
Die Existenz einer eindeutigen Lösung folgt mit dem Lemma von Lax-Milgram.

Aufgabe 30 (Äquivalenz von Normen auf einem Dreieck) 4 Punkte

Es sei $T \subseteq \mathbb{R}^2$ ein Dreieck und P_1 der Raum der affinen Funktionen auf T. Zeigen Sie, dass die $L^\infty-$ und die L^2- Normen auf P_1 äquivalent sind, d.h.

$$\max_T |p| \leq C(T) \|p\|_{L^2(T)}$$

für $p \in P_1$, und geben Sie $C(T)$ an.
Hinweis: Verwenden Sie die Tatsache, dass die Kantenmittenintegration für quadratische Funktionen exakt ist.

Lösung

Sei T ein Dreieck mit Ecken A, B, C, Seitenmittelpunkten a, b, c und baryzentrischen Koordinaten α, β, γ. Dann sind die affinen Lagrange-Basisfunktionen bezüglich a, b, c

$$f_a(\alpha, \beta, \gamma) = (1 - 2\alpha), \quad f_b(\alpha, \beta, \gamma) = (1 - 2\beta), \quad f_c(\alpha, \beta, \gamma) = (1 - 2\gamma).$$

Sei $p = \begin{pmatrix} p(a) \\ p(b) \\ p(c) \end{pmatrix} \in P_1$, dann gilt

$$\begin{aligned} p(A) &= p(a) f_a(1,0,0) + p(b) f_b(1,0,0) + p(c) f_c(1,0,0) \\ &= p(a)(-1) + p(b) + p(c) = p \cdot \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^t . \end{aligned}$$

Analog erhält man

$$p(B) = p \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}^t \quad \text{und} \quad p(C) = p \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}^t .$$

Als affine Funktion nimmt p ihr Maximum an einer Ecke des Dreiecks an:

$$\begin{aligned} \|p\|_{L^\infty} &= \max_{x \in T} |p(x)| = \max_{x \in \{A,B,C\}} |p(x)| \\ &\leq |p(a)| + |p(b)| + |p(c)| = \|p\|_1 \\ &\leq \|p\|_2 \cdot \sqrt{3} = \frac{\sqrt{3}\sqrt{3}}{\sqrt{|T|}} \sqrt{\frac{|T|}{3} (p(a)^2 + p(b)^2 + p(c)^2)} \\ &= \frac{3}{\sqrt{|T|}} \sqrt{\int_T p^2} = \frac{3}{\sqrt{|T|}} \|p\|_{L^2} \end{aligned}$$

Aufgabe 31 (Singularität am Übergang Dirichlet-Neumann Rand) 4 Punkte

Zeigen Sie,

(i) dass der Laplace-Operator in Polarkoordinaten die folgende Form hat:

$$\Delta u = \partial_r^2 u + \frac{1}{r^2}\partial_\varphi^2 u + \frac{1}{r}\partial_r u$$

(ii) dass die Lösung des Poisson-Problems

$$\begin{aligned} -\Delta u &= 0 \text{ in } \Omega\,, \\ u &= g \text{ auf } \partial\Omega \end{aligned}$$

mit $\Omega = \{(r\cos(\varphi), r\sin(\varphi)) \;:\; 0 < r < 1, 0 < \varphi < 2\pi\}$ und $g = r^{\frac{1}{2}}\sin(\frac{\varphi}{2})$ keine schwache Lösung des Problems

$$\begin{aligned} -\Delta u &= 0 \text{ in } B_1(0)\,, \\ u &= g \text{ auf } \partial B_1(0) \end{aligned}$$

ist.

Lösung

(i) Die Aussage folgt mit $x = r\cos(\phi)$ $y = r\sin(\phi)$ und der Kettenregel.

(ii) $u(r,\phi) = r^{\frac{1}{2}}\sin\left(\frac{\phi}{2}\right)$ ist eine starke Lösung auf Ω, aber keine schwache Lösung in $B_1(0)$:

Seien

$$\begin{aligned} B_1^+ &= \{(r\cos(\varphi), r\sin(\varphi)) \;:\; 0 < r < 1, 0 < \varphi < \pi\} \text{ und} \\ B_1^- &= \{(r\cos(\varphi), r\sin(\varphi)) \;:\; 0 < r < 1, \pi < \varphi < 2\pi\}\,, \end{aligned}$$

sowie n_+ und n_- die Normalen an B_1^+ und B_1^-. Dann gilt

$$\begin{aligned} &\int_{B_1(0)} \nabla u \cdot \nabla v \, \mathrm{d}x = 0 \text{ für alle } v \in C_0^\infty(B_1(0)) \\ \Leftrightarrow &\int_{B_1^+(0)} \nabla u \cdot \nabla v \, \mathrm{d}x + \int_{B_1^-(0)} \nabla u \cdot \nabla v \, \mathrm{d}x = 0 \\ \Leftrightarrow &\int_{\partial B_1^+} (\nabla u_+ \cdot n_+)\, v \, \mathrm{d}a + \int_{\partial B_1^-} (\nabla u_- \cdot n_-)\, v \, \mathrm{d}a = 0 \\ \Leftrightarrow &\int_{\partial B_1^+} v \left(\nabla u_+ \cdot n_+ + \nabla u_- \cdot n_-\right) \mathrm{d}a = 0\,. \end{aligned}$$

Da $\cos(0) = 1$, $\cos(\frac{2\pi}{2}) = -1$, $\nabla u = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} r^{-\frac{1}{2}} \sin(\frac{\phi}{2}) \\ r^{\frac{1}{2}}\cos(\frac{\phi}{2}) \end{pmatrix}$ und für die Normalen gilt $n_+ = -n_-$, folgt $\nabla u_+ \cdot n_+ + \nabla u_- \cdot n_- \neq 0$ auf $\partial B_1^+ = \{(x,0) : |x| \leq 1\}$.

Aufgabe 32 (Schwache Lösung durch Spiegelung) **4 Punkte**

Sei $u \in H^{1,2}(\Omega)$ schwache Lösung zum Problem

$$\begin{aligned} -\Delta u &= f \text{ auf } \Omega\,, \\ u &= 0 \text{ auf } \partial\Omega \end{aligned}$$

mit $\Omega = [0,1]^2$ und $f \in L^2$. Man konstruiere durch Spiegelung eine schwache Lösung von

$$\begin{aligned} -\Delta u &= \widetilde{f} \text{ auf } [-1,1]^2\,, \\ u &= 0 \text{ auf } \partial([-1,1]^2) \end{aligned}$$

wobei $\widetilde{f}$ eine geeignete Funktion mit $\widetilde{f}_{|_{[0,1]^2}} = f$ ist.

Lösung

Betrachte zunächst die Erweiterung von $\Omega = [0,1]^2$ auf $\Omega_1 = [0,1]^2 \cup ([0,1] \times [-1,0])$. Seien hierzu $\tilde{f}$ und $\tilde{u}$ definiert durch Spiegelung von f und u an der x-Achse.
Nun ist zu zeigen:

(i) $\tilde{u} \in H^{1,2}(\Omega_1)$:
$\tilde{u} \in H^{1,2}(\Omega) \Leftrightarrow \int_{\Omega_1} D^\alpha u \cdot \varphi \,\mathrm{d}x = (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega_1} u \cdot D^\alpha \varphi \,\mathrm{d}x$ für alle $\varphi \in C_0^\infty(\Omega_1)$. Es genügt, zu zeigen, dass

$$\int_{[0,1]^2} D^\alpha u \cdot \varphi \,\mathrm{d}x = (-1)^{|\alpha|} \int_{[0,1]^2} u \cdot D^\alpha \varphi \,\mathrm{d}x \quad \text{ und}$$
$$\int_{[0,1]\times[-1,0]} D^\alpha u \cdot \varphi \,\mathrm{d}x = (-1)^{|\alpha|} \int_{[0,1]\times[-1,0]} u \cdot D^\alpha \varphi \,\mathrm{d}x\,.$$

Wir benutzen hierfür, dass jedes $\varphi \in C_0^\infty(\Omega_1)$ auf $[0,1]^2$ durch ein $\varphi^+ \in C_0^\infty([0,1]^2)$ in $L^2([0,1]^2)$ approximiert werden kann, ebenso auf $[0,1] \times [-1,0]$ durch ein $\varphi^- \in C_0^\infty([0,1] \times [-1,0])$ in $L^2([0,1] \times [-1,0])$. Dazu bemerkt man zunächst, dass der Raum der Testfunktionen $C_0^\infty(\Omega)$ dicht in $L^2(\Omega)$ liegt. Insbesondere kann man für jede Funktion $\varphi \in C_0^\infty(\Omega_1)$ eine Folge $(\varphi_k)_k \subset C_0^\infty(\Omega)$ finden, sodass

$$\lim_{k\to\infty} \|\varphi - \varphi_k\|_{L^2(\Omega)} = 0$$

(da $\varphi|_\Omega \in C^\infty(\Omega) \subset L^2(\Omega)$). Mit der Cauchy-Schwarz-Ungleichung folgt daraus dann

$$\begin{aligned} \left| \int_\Omega D^\alpha u \cdot \varphi \, dx - \int_\Omega D^\alpha u \cdot \varphi_k \, dx \right| &\leq \int_\Omega |D^\alpha u| \, |\varphi - \varphi_k| \, dx \\ &\leq \|D^\alpha u\|_{L^2(\Omega)} \, \|\varphi - \varphi_k\|_{L^2(\Omega)} \to 0, \end{aligned}$$

für $k \to \infty$. Da nun $u \in H^{1,2}(\Omega)$, folgt also

$$\begin{aligned} \int_\Omega D^\alpha u \cdot \varphi \, dx &= \lim_{k\to\infty} \int_\Omega D^\alpha u \cdot \varphi_k \, dx = \lim_{k\to\infty} (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega u \cdot D^\alpha \varphi_k \, dx \\ &= (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega u \cdot D^\alpha \varphi \, dx, \end{aligned}$$

wobei die letzte Gleichheit wie oben mit der Cauchy-Schwarz-Ungleichung gezeigt werden kann. Analog behandelt man auch die Gleichheit über $[0,1] \times [-1,0]$.

(ii) $\tilde{u}$ ist schwache Lösung. Diese Aussage folgt analog zu Aussage (i).

Nun erweitert man auf die gleiche Weise von Ω_1 auf $\Omega_2 = [-1,1]^2$.